Tribu et mesure : à retenir (J-Y D)

Définition

On considère un ensemble X et une partie $\mathcal{A}$ de $\mathscr{P}(X)$. ← [$\mathscr{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X]

On dit que $\mathcal{A}$ est une *tribu* sur X (ou que « $(X,\mathcal{A})$ *est un espace mesurable* ») si :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad A^c \in \mathcal{A}$; ← [A^C désigne le complémentaire de A dans X]
(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Dans ce cas, les éléments de $\mathcal{A}$ (par exemple X) seront appelées *les parties mesurables de X*.

Définition-Proposition

Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. On a :

(i) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A\cup B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$;
(ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \quad \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

où $\quad \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\limits_{n\geq 0}\bigcup\limits_{k\geq n} A_k$

et $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ pour } n \text{ assez grand}\} = \bigcup\limits_{n\geq 0}\bigcap\limits_{k\geq n} A_k$ $^{(\star)}$.

Définition

On considère un ensemble X et une partie $\mathcal{M}$ de $\mathscr{P}(X)$.

On dit que $\mathcal{M}$ est une *classe monotone dans X* si :

(i) $X \in \mathcal{M}$;
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{M} \quad (A \subseteq B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{M})$;
(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}} \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\Big)$.

Proposition

Soient X un ensemble et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$.

(a) Il existe une plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{C}$. ← $\Big[\bigcap\limits_{\mathcal{A} \text{ tribu } \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}\Big]$
On l'appelle *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$, et la note $\sigma(\mathcal{C})$.

(b) Il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$. ← $\Big[\bigcap\limits_{\mathcal{M} \text{ classe monotone } \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{M}\Big]$
On l'appelle *la classe monotone dans X engendrée par* $\mathcal{C}$, et la note $\mathscr{M}(\mathcal{C})$.

Exemple

On se donne un espace topologique X et note $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts.
On appelle *tribu borélienne de X* la tribu $\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$.
Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sont les réunions de $[-\infty, b[$, $]a, b[$, $]a, +\infty]$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
On a : $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{]-\infty, a] \ ; \ a \in \mathbb{R}\}\big)$ et $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\big(\{[-\infty, a] \ ; \ a \in \mathbb{R}\}\big)$.

Théorème (« lemme des classes monotones »)

Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$ $\underbrace{\text{stable par intersection de deux éléments}}_{\text{c'est-à-dire stable par intersection finie}}$.
Alors : $\boxed{\mathscr{M}(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})}$.

Définition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$, et une application $f \colon X \to Y$.

On dit que f *est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable* si : $\quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Quand X et Y sont des espaces topologiques, on dira que f *est borélienne* lorsqu'elle est mesurable pour les tribus boréliennes.

$(\star)$ Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, on note $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n := \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n := \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k$.

Par conséquent : $\quad \limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n}(x)$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n}(x)$ pour tout $x \in X$.

Proposition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$.

(a) Soient $f\colon X\to Y$ et $g\colon Y\to Z$ mesurables. L'application $g\circ f\colon X\to Z$ est mesurable.

(b) Soit $A\subseteq X$. On note $\mathbb{1}_A\colon A\to\mathbb{R}$ la fonction caractéristique de A.
On a : $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

(d) On suppose que $f\colon X\to Y$ et $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{C})$ pour une certaine partie $\mathcal{C}$ de $\mathscr{P}(Y)$.
Dans ce cas, f est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable si et seulement si : $f^{-1}(C)\in\mathcal{A}$ pour tout $C\in\mathcal{C}$.

Quand X et Y sont des espaces topologiques, on en déduit que toute application continue de X dans Y est borélienne.

(e) Soient $f\colon X\to Y$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ dont la réunion est X.
On munit A_n de la tribu $\mathcal{A}_n=i_n^{-1}(\mathcal{A}):=\underbrace{\{A\cap A_n\ ;\ A\in\mathcal{A}\}}_{\{A\in\mathcal{A}\ \mid\ A\subseteq A_n\}}$, où i_n est l'injection de A_n dans X.
Par exemple, on a : $\mathcal{A}_n=\mathscr{B}(A_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}'$ quand X est un espace topologique et $\mathcal{A}=\mathscr{B}(X)$.

On a : f est mesurable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}'$, la restriction $f_{|A_n}$ est mesurable.(*)

Définition-Proposition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$.

(a) On munit $X\times Y$ de la tribu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:=\sigma\big(\{A\times B\ ;\ A\in\mathcal{A}\ \text{ et }\ B\in\mathcal{B}\}\big)$.

On appelle $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ la *tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$*. Par exemple, on a : $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)=\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Une application $u\colon \begin{array}{rcl} X & \to & Y\times Z \\ x & \mapsto & (v(x),w(x)) \end{array}$ est mesurable si et seulement si v et w sont mesurables.

Donc la somme et le produit de deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ sont mesurables.

Définition

On considère un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$ et une application $\mu\colon\mathcal{A}\to\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.

(a) On dit que μ est une *mesure* sur $(X,\mathcal{A})$ (ou que « $(X,\mathcal{A},\mu)$ *est un espace mesuré* ») si(**) :

(i) $\mu(\emptyset)=0$;
(ii) $\mu\big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\big)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$ quand A_n, $n\in\mathbb{N}$, sont des éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

Dans ce cas, on dit que $N\subseteq X$ est *μ-négligeable* s'il existe $A\in\mathcal{A}$ tel que : $N\subseteq A$ et $\mu(A)=0$.
On dira « μ-presque partout » (en abrégé « p. p. ») pour « en dehors d'une partie μ-négligeable ».

(b) On suppose que μ est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. On dit que μ est *finie* si : $\mu(X)<+\infty$.

On dit que μ est *σ-finie* s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\quad\text{ et }\quad\mu(A_n)<+\infty\ \text{ pour tout } n\geq 0.$$

Définition-Proposition

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Il est dit *complet* si $\mathcal{A}$ contient toutes les parties μ-négligeable.

On pose : $\widetilde{\mathcal{A}}:=\{A\cup N\ ;\ A\in\mathcal{A}\ \text{ et }\ N\subseteq X\ \mu\text{-négligeable}\}$ et $\widetilde{\mu}(A\cup N)\overset{\text{indépendant décomposition}}{:=}\mu(A)$.
On a : $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu sur X « complétée de $(\mathcal{A},\mu)$ » et $(X,\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{\mu})$ est un espace mesuré complet.

Exemple

La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda(]a,b[):=b-a$ pour $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$ (unicité).

On appelle *tribu de Lebesgue* la tribu complétée de $(\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

(*) Cela découle des égalités suivantes : ${f_{|A_n}}^{-1}(B)=f^{-1}(B)\cap A_n$ et $f^{-1}(B)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}'}{f_{|A_n}}^{-1}(B)$ pour tout $B\in\mathcal{B}$.

(**) La *somme* d'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs avec I infini et I dénombrable (au sens où I s'injecte dans $\mathbb{N}$) est :

$$\underbrace{\sum_{i\in I}}_{\text{indépendant du choix de la numérotation}}a_i:=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(a_{i_0}+a_{i_0}+\cdots+a_{i_n}\right)}_{\text{croissant en } n}\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\quad\text{où}\quad I=\{\underbrace{i_n}_{\text{distincts}}\ ;\ n\in\mathbb{N}\}.$$