

Espaces L^p et convolution : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) , un ensemble I , $d \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p, p' \leq +\infty$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Rappels

(a) Pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x)}_{\text{mesurable en } x} d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k(x) d\mu(x) \quad \text{« lemme de Fatou ».}$$

(b) Pour toute suite *croissante* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)}_{\text{mesurable en } x} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \quad \text{« théorème de convergence monotone ».}$$

Définition-Proposition ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

(a) On dira qu'une propriété portant sur $x \in X$ est vérifiée μ -presque partout si l'ensemble des points x qui ne la vérifient pas est inclus dans une partie mesurable A telle que $\mu(A) = 0$.

(b) Pour toute application mesurable $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, on note :

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty \quad \text{si } p < +\infty$$

$$\text{et } \|f\|_\infty := \min \{ M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \text{ } \mu\text{-presque partout} \} \leq +\infty \quad \text{où } \min \emptyset := +\infty.$$

Lorsque X est un ouvert de \mathbb{R}^d , muni de dx , et $f \in \mathcal{C}(X)$, on a en ce sens : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

(c) On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \{ f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty \}$ et $L_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \mathcal{N}_\mu^{(*)}$ où \mathcal{N}_μ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ formé des fonctions mesurables nulles μ -presque partout.

On pose : $l_{\mathbb{K}}^p(I) := L_{\mathbb{K}}^p(I, \mathcal{P}(I), \text{comptage})$ et $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d) := L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d, \text{Borel}, dx) \xrightarrow{\text{can}} L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d, \text{Lebesgue}, dx)$.

Ainsi, quand $p < +\infty$: $l_{\mathbb{K}}^p(I) = \{ (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mid \sum_{i \in I} |a_i|^p < +\infty \}$ et $\| (a_i)_{i \in I} \|_p = \left(\sum_{i \in I} |a_i|^p \right)^{1/p}$.

(d) La famille $(l_{\mathbb{K}}^k(I))_{1 \leq k \leq +\infty}$ croît, et, la famille $(L_{\mathbb{K}}^k(\mu))_{1 \leq k \leq +\infty}$ décroît lorsque $\mu(X) < +\infty$.

On a : $l^p := l_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{N})$ est séparable si et seulement si $p < +\infty$.

Pour Ω ouvert non-vide de \mathbb{R}^d , on a : $L^p(\Omega) := L_{\mathbb{C}}^p(\Omega, dx)$ est séparable si et seulement si $p < +\infty$.

Proposition

Soient $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications mesurables.

(a) On a : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty$ « inégalité de Minkowski ».

[Si $1 < p < +\infty$ et $f, g \in L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$, on a : $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha f(x) = \beta g(x)$ p. p.]

(b) On a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \leq +\infty$ « inégalité de Hölder ».

[Si $1 < p < +\infty$, $f \in L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ et $g \in L_{\mathbb{C}}^{p'}(\mu)$, on a : $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha |f(x)|^p + \beta |g(x)|^{p'} = 0$ p. p.]

Théorème (« théorème de Riesz-Fischer »)

(a) L'espace vectoriel $L^p(\mu) := L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ muni de $f \mapsto \|f\|_p$ est un espace de Banach.

En particulier $L^2(\mu)$ muni de $f \mapsto \|f\|_2$ est un espace de Hilbert.

(b) Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu) := L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$, alors $(f_n)_{n \geq 0}$ a une suite extraite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge simplement presque partout vers f .

← [on peut prendre $(f_{n_k})_{k \geq 0} = (f_n)_{n \geq 0}$ quand $p = +\infty$]

(*) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et F un sous-espace vectoriel de E .

On pose $\dot{x} := \{x + y; y \in F\}$ quand $x \in E$, puis $E/F := \{\dot{x}; x \in E\}$.

« classe de x »

L'ensemble E/F muni des « lois » portant sur $u, v \in E/F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ déterminées par les égalités

(i) $u + v := \widehat{x + y}$ indépendamment du choix d'éléments x, y de E tels que $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$

(ii) $\alpha \times u := \widehat{\alpha x}$ indépendamment du choix d'un élément x de E tel que $u = \dot{x}$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel, appelé \mathbb{K} -espace vectoriel quotient de E par F .

Théorème

On peut définir l'application linéaire suivante : $L^{p'}(\mu) \xrightarrow{\text{dual topologique de } L^p(\mu)} \overbrace{(L^p(\mu))'}^{\text{dual topologique de } L^p(\mu)}$.

$$g \longmapsto \left(f \mapsto \int_X fg \, d\mu \right)$$

Quand $p < +\infty$ et μ est σ -finie : elle conserve la norme et est bijective.^(*)

Quand $p = +\infty$: elle conserve la norme, mais n'est pas surjective dans le cas de $l^1 \hookrightarrow (l^\infty)'$.

Définition-Proposition

On fixe un ouvert Ω de \mathbb{R}^d .

(a) On note $\mathcal{L}^{p,loc}(\Omega)$ l'ensemble des applications mesurables f de Ω dans \mathbb{C} dont la restriction à toute boule fermée \tilde{B} de \mathbb{R}^d incluse dans Ω appartient à $\mathcal{L}^p(\tilde{B})$. Il contient $\mathcal{C}(\Omega)$.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}^{1,loc}(\Omega)$. Le support $\text{Supp } f$ de f est le plus petit fermé de Ω hors duquel f s'annule presque partout. Quand f est continue, $\text{Supp } f$ est donc l'adhérence dans Ω de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.

(c) On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{Supp } f \text{ compact}\}$.

(d) On note : $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0\} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Définition-Proposition

On se donne $1 \leq q \leq +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$.

(a) On peut définir pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) \, dt$.

On a : $g * f = f * g$ et $\text{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{Supp } f + \text{Supp } g}$.

(b) On a : $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ où $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ « théorème de Young ».

En particulier : $L^1(\mathbb{R}^d) * L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^p(\mathbb{R}^d) * L^{p'}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Lorsque $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $v \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, on a : $u * v$ est définie sur \mathbb{R}^d avec $\|(u * v)\|_\infty \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$, $u * v$ est uniformément continue, et $u * v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ quand $1 < p < +\infty$.

(d) Soit $1 \leq s \leq +\infty$ tel que $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1) + \frac{1}{s} \geq 1$. On a : $(f * g) * h = f * (g * h)$ pour $h \in L^s(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre associative et commutative.

(e) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$, on a : $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial}{\partial x_k}(u * v) = u * \frac{\partial v}{\partial x_k}$ quand $1 \leq k \leq d$.

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si :

- (i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t) \, dt = 1$ pour tout $n \geq 0$; existe, cf. $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ avec $\alpha \in \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha(t) \, dt = 1$.
- (ii) $\int_{\{\|t\| \geq \varepsilon\}} \alpha_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Dans ce cas, si $p < +\infty$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p(\mathbb{R}^d)} f$ et $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \quad f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^\infty(\mathbb{R}^d)} f$.

(b) On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une suite régularisante si :

- (i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t) \, dt = 1$ pour tout $n \geq 0$; existe, cf. $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ avec $\alpha(x) = k \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}) \mathbb{1}_{[0,1[}(\|x\|)$
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Supp } \alpha_n \subseteq B(0, \varepsilon)$ dès que $n \geq N$.

Dans ce cas $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'unité et $f * \alpha_n$ est C^∞ quand $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Proposition

(a) Si $p < +\infty$: $\text{Vect}(\mathbb{1}_A)_{A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < +\infty}$ est dense dans $L^p(\mu)$.

(b) L'espace vectoriel $\text{Vect}(\mathbb{1}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$.

(c) Si $p < +\infty$ et J est un intervalle : $\text{Vect}(\mathbb{1}_{[a,b]})_{a,b \in J}$ est dense dans $L^p(J)$.

Si $p < +\infty$ et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d : $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

(d) L'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

(*) Lorsque $1 < p < +\infty$, on peut enlever « σ -finie », cf. *Real and Abstract Analysis* de Hewitt et Stromberg, p. 231.