Théorème de Tychonoff

Définition 1

Soit X un ensemble.

(a) Un *filtre* sur X est un ensemble non vide $\mathscr{F}$ de parties non vides de X tel que :
(i) $\forall F_1, F_2 \in \mathscr{F} \quad F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$;
(ii) $\forall F \in \mathscr{F} \quad \forall A \subseteq X \quad (F \subseteq A \Longrightarrow A \in \mathscr{F})$.

(b) Un *ultrafiltre* sur X est un élément $\mathscr{U}$ de l'ensemble des filtres sur X qui est maximal pour la relation d'inclusion $\subseteq$.

Proposition 1

Soient X un ensemble et $\mathscr{F}$ un filtre sur X.

(a) Il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur X qui contient $\mathscr{F}$.

(b) On a : $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, $A \in \mathscr{F}$ ou $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Démonstration

(a) Il suffit d'appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des filtres contenant $\mathscr{F}$, dans lequel toute partie totalement ordonnée est majorée par la réunion de ses éléments qui est elle-même un filtre.

(b) ($\Longrightarrow$) On suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
On fixe un filtre $\mathscr{F}'$ qui contient strictement $\mathscr{F}$. On se donne $A \in \mathscr{F}'$ tel que $A \notin \mathscr{F}$.
On a : $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, donc $X \setminus A \notin \mathscr{F}'$ et a fortiori $X \setminus A \notin \mathscr{F}$.

($\Longleftarrow$) Soit $A \subseteq X$ tel que $A \notin \mathscr{F}$ et $X \setminus A \notin \mathscr{F}$.
On pose : $\mathscr{F}' = \{F' \subseteq X \mid \exists F \in \mathscr{F} \quad F \cap A \subseteq F'\}$.
L'inclusion $F \supseteq F \cap A$ montre que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$. Comme $A \in \mathscr{F}'$ et $A \notin \mathscr{F}$, on a même $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$.
Pour montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas un ultrafiltre, il reste à constater que $\mathscr{F}'$ est un filtre sur X.
Tout d'abord : $X \supseteq X \cap A$ avec $X \in \mathscr{F}$, donc $X \in \mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}' \neq \emptyset$.

Lorsque $F \in \mathscr{F}$, on a $F \not\subseteq X \setminus A$ puisque $X \setminus A \notin \mathscr{F}$, puis $F \cap A \neq \emptyset$ ce qui montre que les éléments de $\mathscr{F}'$ sont non vides.

(i) Soient $F'_1, F'_2 \in \mathscr{F}'$: il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ tels que $F_1 \cap A \subseteq F'_1$ et $F_2 \cap A \subseteq F'_2$.
On a : $(F_1 \cap F_2) \cap A \subseteq F'_1 \cap F'_2$ avec $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$, donc $F'_1 \cap F'_2 \in \mathscr{F}'$.

(ii) Il est clair que toute partie de X contenant un élément de $\mathscr{F}'$ appartient elle-même à $\mathscr{F}'$. $\square$

Définition 2

Soient X un espace topologique, $\mathscr{F}$ un filtre sur X et $l \in X$.
On note $\mathcal{V}(l)$ l'ensemble des voisinages de l dans X.

On dit que $\mathscr{F}$ *converge vers* l (ou que x tend vers l en suivant $\mathscr{F}$) si $\mathcal{V}(l) \subseteq \mathscr{F}$, c'est-à-dire :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists F \in \mathscr{F} \quad \forall x \in X \quad (x \in F \Longrightarrow x \in V).$$

Dans ce cas et lorsque X est séparé, cette limite l est unique et notée $\lim\limits_{\mathscr{F}} \mathrm{id}_X$.(*)

Exemple

Soient X un espace topologique séparé, $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de X et $l \in X$.
On considère le filtre $\mathscr{F}$ sur X défini par : $\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} \quad \{x_n\}_{n \geq N} \subseteq A\}$.

On a : $\quad x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \iff \lim\limits_{\mathscr{F}} \mathrm{id}_X = l$.

($*$) Soient X un ensemble, Y un espace topologique, $f \colon X \to Y$ et $l \in Y$.

(a) Une *base de filtre* sur X est un ensemble non vide $\mathscr{B}$ de parties non vides de X tel que :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B} \quad \exists B \in \mathscr{B} \quad B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

(b) On dit que f tend vers l suivant une base de filtre $\mathscr{B}$ fixée sur X, et note $l \in \lim\limits_{\mathscr{B}} f$, si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists B \in \mathscr{B} \quad \forall x \in X \quad (x \in B \Longrightarrow f(x) \in V).$$

Proposition 2

Soit X un espace topologique séparé.

On a : X est compact si et seulement si tout filtre sur X est inclus dans un filtre convergent.

Démonstration

($\Longrightarrow$) On suppose que X est compact. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X.

On suppose, par l'absurde, que $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} \overline{F} = \emptyset$. Comme X est compact et $X = \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} (X\setminus\overline{F})$ où les $X\setminus\overline{F}$ sont des ouverts de X, il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $F_1, ..., F_n \in \mathscr{F}$ tels que $\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n} = \emptyset$.

L'inclusion $F_1 \cap \cdots \cap F_n \subseteq \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n}$, montre que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$, ce qui donne une contradiction sachant que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathscr{F}$.

On se donne $x_0 \in \bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} \overline{F}$. On pose : $\mathscr{F}' = \{A \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \quad \exists F \in \mathscr{F} \quad V \cap F \subseteq A\}$.

Le choix de $V = X$ montre que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$, donc $\mathscr{F}' \neq \emptyset$. On vérifie que $\mathscr{F}'$ est un filtre sur X.

Quand $V \in \mathcal{V}(x_0)$, on a : $V \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Les éléments de $\mathscr{F}'$ sont donc non vides.

(i) Soient $F_1', F_2' \in \mathscr{F}'$: il existe $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ tels que $V_1 \cap F_1 \subseteq F_1'$ et $V_2 \cap F_2 \subseteq F_2'$. On a : $(V_1 \cap V_2) \cap (F_1 \cap F_2) \subseteq F_1' \cap F_2'$ avec $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$, donc $F_1' \cap F_2' \in \mathscr{F}'$.

(ii) Il est clair que toute partie de X contenant un élément de $\mathscr{F}'$ appartient elle-même à $\mathscr{F}'$.

Ainsi $\mathscr{F}$ est inclus dans le filtre $\mathscr{F}'$. De plus : $\mathcal{V}(x_0) \subseteq \mathscr{F}'$ donc $\mathscr{F}'$ converge vers x_0.

($\Longleftarrow$) On suppose que tout filtre sur X est inclus dans un filtre convergent.
Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouvert de X dont aucune famille finie extraite ne recouvre X, où $I \neq \emptyset$.

On pose : $\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad \exists i_1, ..., i_n \in I \quad X\setminus(U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}) \subseteq A\}$.

On a facilement : $\mathscr{F}$ est un filtre sur X.

Par hypothèse, il existe un filtre $\mathscr{F}'$ sur X contenant $\mathscr{F}$ et $x_0 \in X$ tels que $\mathscr{F}'$ converge vers x_0.

Soit $i \in I$. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, comme $V \in \mathscr{F}'$ et $X\setminus U_i \in \mathscr{F}$, on a : $V \cap (X\setminus U_i) \in \mathscr{F}'$ puis $V \cap (X\setminus U_i) \neq \emptyset$; par conséquent x_0 est adhérent au fermé $X\setminus U_i$ de X, donc $x_0 \in X\setminus U_i$.

Finalement, $(U_i)_{i\in I}$ ne recouvre pas X car la réunion des $(U_i)_{i\in I}$ ne contient pas x_0. □

Théorème (« théorème de Tychonoff »)

Soient $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques compacts X_i, $i \in I$. On a : X est compact.

Démonstration

• On vérifie que X est séparé. Soient $x' = (x_i')_{i\in I}$ et $x'' = (x_i'')_{i\in I}$ deux éléments distincts de X.

Il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0}' \neq x_{i_0}''$, puis des ouverts U_{i_0}' et U_{i_0}'' de X_{i_0} tels que : $x_{i_0}' \in U_{i_0}'$ et $x_{i_0}'' \in U_{i_0}''$ avec $U_{i_0}' \cap U_{i_0}'' = \emptyset$. On pose : $U_i' = X_i$ et $U_i'' = X_i$ lorsque $i \neq i_0$.
Les ouverts $U' := \prod\limits_{i\in I} U_i'$ et $U'' := \prod\limits_{i\in I} U_i''$ de X vérifient : $x' \in U'$ et $x'' \in U''$ avec $U' \cap U'' = \emptyset$.

• D'après la proposition 1, tout filtre sur X est inclus dans un ultrafiltre.
On se donne donc un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur X, auquel cas $X \neq \emptyset$, et vérifie qu'il converge.

Soit $i \in I$. On note p_i la projection canonique de X sur X_i et $p_i(\mathscr{U}) = \{p_i(U) \,;\, U \in \mathscr{U}\}$.

En utilisant le fait que $p_i^{-1}(p_i(U)) \supseteq U$ pour $U \in \mathscr{U}$, on obtient : $p_i(\mathscr{U})$ est un filtre sur X_i.

D'après la proposition 1 (b), $p_i(\mathscr{U})$ est un ultrafiltre car pour $A \subseteq X_i$ tel que $A \notin p_i(\mathscr{U})$, on a : $A = p_i(p_i^{-1}(A))$ donc $p_i^{-1}(A) \notin \mathscr{U}$, puis sachant que $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre $X\setminus p_i^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, enfin $X_i\setminus A = p_i(p_i^{-1}(X_i\setminus A)) = p_i(X\setminus p_i^{-1}(A)) \in p_i(\mathscr{U})$.

D'après la proposition 2, l'ultrafiltre $p_i(\mathscr{U})$ a une limite notée x_i dans le compact X_i.

On pose : $x = (x_i)_{i\in I}$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $i_1, .., i_n \in I$ distincts, un ouvert Ω_{i_1} de X_{i_1} contenant x_{i_1} et ... et un ouvert Ω_{i_n} de X_{i_n} contenant x_{i_n} tels que, en posant $\Omega_i = X_i$ lorsque $i \notin \{i_1, ..., i_n\}$, on a : $V \supseteq \prod\limits_{i\in I} \Omega_i$. Par convergence de $p_{i_k}(\mathscr{U})$ vers x_{i_k}, on a $\Omega_{i_k} \in p_{i_k}(\mathscr{U})$ donc $\Omega_{i_k} = p_{i_k}(U_{i_k})$ pour un certain $U_{i_k} \in \mathscr{U}$. Il en résulte que $V \supseteq U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n}$ avec $U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n} \in \mathscr{U}$.

En conclusion : $\mathscr{U}$ converge vers x.

• D'après la proposition 2, X est compact. □