Soit $X \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. On note $\mathrm{ad}\,X : \mathcal{M}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$

$$Y \longmapsto [X,Y] = XY-YX$$

Montrer que $(d\exp)(X).Y = \exp X . \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\,X)^k}{(k+1)!}(Y)$ pour $Y \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur "la" famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ des valeurs propres de X, pour que l'application exponentielle se restreigne en un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de X dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ sur un voisinage ouvert de $\exp X$ dans $GL(n,\mathbb{C})$.

<u>démonstration :</u>

. On montre, pour tout $Y \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$:

(i) $(d\exp)(X).Y = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{q=0}^{j} X^{j-q} Y X^q$

(ii) $(\exp -X).[(d\exp)(X).Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{q=0}^{k} (-1)^{k-q} C_k^{k-q} X^{k-q} Y X^q \right)$

(iii) $(-1)^k (\mathrm{ad}\,X)^k(Y) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^{k-q} C_k^{k-q} X^{k-q} Y X^q$ pour $k \geq 0$.

(i) la série de droite est absolument convergente car :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)!} \Big\| \sum_{q=0}^{j} X^{j-q} Y X^q \Big\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{q=0}^{j} \|X\|^{j-q} \|Y\| \|X\|^q = e^{\|X\|} \times \|Y\| .$$

Donc : $\exp(X+Y) - \exp X = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \Big(\underbrace{(X+Y)\dots(X+Y)}_{j \text{ fois}} - X^j \Big)$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)!} \Big(\sum_{p+q=j} X^p Y X^q \Big)}_{\text{linéaire en } Y} + \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+2)!} \Big(\sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j+2} \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{j+2} \leq j}} X^{\varepsilon_1} Y^{1-\varepsilon_1} \dots X^{\varepsilon_{j+2}} Y^{1-\varepsilon_{j+2}} \Big)}_{R(Y)}$$

avec $\|R(Y)\| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+2)!} \Big(\sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j+2} \in \{0,1\} \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{j+2} \leq j}} \|X\|^{\varepsilon_1} \|Y\|^{1-\varepsilon_1} \dots \|X\|^{\varepsilon_{j+2}} \|Y\|^{1-\varepsilon_{j+2}} \Big) \underset{\text{calcul ci-dessus}}{=} e^{\|X\|} \big(e^{\|Y\|} - 1 - \|Y\| \big) \underset{\substack{Y \to 0 \\ (X \text{ fixé})}}{=} o(\|Y\|)$

(ii) La série produit de $\left(\sum \frac{(-X)^i}{i!} \right)_{i \geq 0}$ et de $\left(\sum \frac{1}{(j+1)!} \sum_{q=0}^{j} X^{j-q} Y X^q \right)_{j \geq 0}$ est absolument convergente.

Son k ième terme est :

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-X)^i}{i!} \cdot \frac{1}{(k-i+1)!} \sum_{q=0}^{k-i} X^{k-i-q} Y X^q = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{q=0}^{k} \Big(\sum_{i=0}^{k-q} (-1)^i C_{k+1}^i \Big) X^{k-q} Y X^q$$

avec $C_{k+1}^0 - C_{k+1}^1 + \dots + (-1)^{k-q} C_{k+1}^{k-q} \underset{\text{convention } C_k^{-1} = 0}{=} (C_k^{-1} + C_k^0) - (C_k^0 + C_k^1) + \dots + (-1)^{k-q} (C_k^{k-q-1} + C_k^{k-q})$

$$= (-1)^{k-q} C_k^{k-q}$$

(iii) Récurrence sur k. C'est vrai pour $k=0$

On fixe $k \geq 0$ pour lequel l'égalité est réalisée.

On a :

$$(-1)^{k+1}(\mathrm{ad}\,X)^{k+1}(Y) = -(-1)^{k}(\mathrm{ad}\,X)^{k}(XY-YX) = -\sum_{q=0}^{k}(-1)^{k-q}C_k^{k-q}\left(X^{k-q+1}YX^{q} - X^{k-q}YX^{q+1}\right)$$

$$\underset{\text{conventions } C_k^{-1}=C_k^{k+1}=0}{=} \sum_{q=0}^{k+1}(-1)^{k+1-q}\underbrace{\left(C_k^{k-q}+C_k^{k+1-q}\right)}_{C_{k+1}^{k+1-q}} X^{k+1-q}YX^{q}.$$

- D'après ce qui précède, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,X) = \begin{bmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{n^2}\end{bmatrix}$

on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\exp(-X)(d\exp)(X)\right) = \begin{bmatrix}f(\mu_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\mu_{n^2})\end{bmatrix}$ avec $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{t^k}{(k+1)!} = \begin{cases}\dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$

Ainsi, $(d\exp)(X)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{ad}\,X$ n'a pas de v.p. dans $i2\pi(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

La base canonique $\mathcal{B}_0=(E_{11},E_{12},\dots,E_{nn})$ de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ vérifie, en posant $X=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(X\,\cdot) = \begin{bmatrix}a_{11}I_n & \cdots & a_{1n}I_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}I_n & \cdots & a_{nn}I_n\end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\cdot\,X) = \begin{bmatrix}X & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & X\end{bmatrix}.$$

On applique cela à $P^{-1}XP$ pour un $P\in GL(n,\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}XP = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{Ad}P.\mathcal{B}_0}(\mathrm{ad}\,X) \underset{\text{déf matrice appl lin}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{Ad}\,P^{-1}\circ \mathrm{ad}\,X\circ \mathrm{Ad}\,P) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{ad}(P^{-1}XP)) = \begin{bmatrix}\begin{matrix}\lambda_1-\lambda_1 & & *\\ 0 & \ddots & \lambda_1-\lambda_n\end{matrix} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}\lambda_n-\lambda_1 & & *\\ 0 & \ddots & \lambda_n-\lambda_n\end{matrix}\end{bmatrix}.$$

On en déduit que $\exp$ est un difféomorphisme local en X si et seulement si $\lambda_i-\lambda_j\notin i2\pi(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ pour tous $i,j\in\{1,\dots,n\}$.