Axiome du choix (J-Y D)

$\longleftarrow$ hors programme ! ! !

Définition 1

Soient E un ensemble et Γ une partie de $E \times E$. On note « $x \leq y$ » pour « $(x, y) \in \Gamma$ ».

On dit que $\leq$ est *une relation d'ordre* $\big($ou que $(E, \leq)$ est *un ensemble ordonné*$\big)$ si :

(i) $\forall x \in E \quad x \leq x$;
(ii) $\forall x, y \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y\big)$;
(iii) $\forall x, y, z \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z\big)$.

Dans ce cas, on dit que $\leq$ est *un ordre total* si :

(iv) $\forall x, y \in E \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

Définition 2

Soient E un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre sur E.

(a) Un *majorant* d'une partie A de E est un élément m de E tel que : $a \leq m$ pour tout $a \in A$.
Une *chaîne* de $(E, \leq)$ est une partie A de E sur laquelle $\leq$ est un ordre total.

(b) Quand $x, y \in E$, on note « $x < y$ » pour « $x \leq y$ et $x \neq y$ ».
Un *élément maximal* de $(E, \leq)$ est un élément m de E tel qu'aucun $x \in E$ ne vérifie $m < x$.
[Attention de ne pas confondre « élément maximal » avec « plus grand élément ».]

(c) On dit que $\leq$ est *un bon ordre* si toute partie non-vide de E a un plus petit élément.(*)

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) « Lemme de Zorn » : un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée, a un élément maximal.
(ii) « Théorème de Zermelo » : tout ensemble admet un bon ordre.
(iii) « Axiome du choix » : pour tout ensemble E, il existe une application f de l'ensemble des parties non-vides de E dans E, telle que pour toute partie non-vide A de E on ait $f(A) \in A$.

Démonstration

((i) $\implies$ (ii)) On suppose que le lemme de Zorn est vérifié.
On se donne un ensemble E et cherche à construire un bon ordre sur E.
On appellera ici *segment initial* d'un ensemble ordonné $(Y, \leq)$ une partie X de Y telle que :

$$\text{si } x \in X, \text{ alors } \{y \in Y \mid y < x\} \subseteq X.$$

On pose : $\mathscr{M} = \{(A, \mathcal{R}_A) \, ; \, A \subseteq E \text{ et } \mathcal{R}_A \text{ bon ordre sur } A\}$. On ordonne $\mathscr{M}$ par :
$(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B) \iff A \subseteq B$ et $\mathcal{R}_A$ est restriction de $\mathcal{R}_B$ et A est un segment initial de B.

On vérifie maintenant que $(\mathscr{M}, \leq)$ est un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée.
Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $(\mathscr{M}, \leq)$. On pose $\mathscr{A} = \{A \, ; \, (A, \mathcal{R}_A) \in \mathscr{C}\}$ et $C = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$.

On munit C de l'ordre $\mathcal{R}_C$ suivant : $\forall x, y \in C \quad \big(x \, \mathcal{R}_C \, y \Leftrightarrow \exists A \in \mathscr{A} \quad (x, y \in A \text{ et } x \, \mathcal{R}_A \, y)\big)$.
Il faut remarquer que dans cette définition la condition « $x \, \mathcal{R}_A \, y$ » ne dépend pas du choix de A.

Soit S une partie non-vide de C. On fixe $s \in S$; il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $s \in A$.
On suppose que s n'est pas le plus petit élément de S (sinon S a un plus petit élément).

On introduit $T := \{t \in S \backslash \{s\} \mid t \, \mathcal{R}_C \, s\}$. Soit $t \in T$; il existe $B \in \mathscr{A}$ tel que $t \in B$. On sait que $t \, \mathcal{R}_C \, s$, et que $\mathscr{C}$ est une chaîne : soit on a $(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B)$ et comme A est un segment initial de B on obtient $t \in A$, soit on a $(B, \mathcal{R}_B) \leq (A, \mathcal{R}_A)$ et comme $B \subseteq A$ on obtient encore $t \in A$.
Comme T est une partie non-vide de A, il a un plus petit élément m pour le bon ordre $\mathcal{R}_A$.
En comparant les éléments de S à s ($\mathcal{R}_C$ est total), on obtient : m est le plus petit élément de S.

Ainsi $\mathcal{R}_C$ est un bon ordre.

(∗) En utilisant les parties de E formées de deux éléments, on constate qu'un bon ordre est un ordre total.

On constate que $(C, \mathcal{R}_C)$ est un majorant de $\mathscr{C}$ dans $(\mathscr{M}, \leq)$. En effet, pour tout $(A, \mathcal{R}_A) \in \mathscr{C}$, on a : $A \subseteq C$ et $\mathcal{R}_A$ est restriction de $\mathcal{R}_C$; de plus, lorsque $s \in A$ et $t \in C \backslash \{s\}$ vérifient $t \,\mathcal{R}_C\, s$, on obtient $t \in A$ en raisonnant comme ci-dessus.

D'après le lemme de Zorn, $(\mathscr{M}, \leq)$ a un élément maximal $(A_0, \mathcal{R}_{A_0})$. Il reste à voir par l'absurde que $A_0 = E$. Sinon on fixe $x \in E \setminus A_0$. On pose $A_1 = A_0 \cup \{x\}$. On note $\mathcal{R}_{A_1}$ l'ordre sur A_1 qui prolonge $\mathcal{R}_{A_0}$ et rend x maximal. On a : $(A_1, \mathcal{R}_{A_1}) \in \mathscr{M}$ et $(A_0, \mathcal{R}_{A_0}) < (A_1, \mathcal{R}_{A_1})$ <u>contradiction</u>.

((ii) $\Longrightarrow$ (iii)) On suppose donné un bon ordre $\leq$ sur E. Il permet de construire l'application f qui à toute partie non-vide A de E associe le plus petit élément de A.

((iii) $\Longrightarrow$ (i)) Cette implication, qui est la plus difficile, est admise.
Voir par exemple `http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~roziere/m63010/zorn.pdf` $\square$

Dorénavant on se placera dans le cadre de la théorie des ensembles usuelle (de Zermelo-Fraenkel) à laquelle on ajoute l'axiome du choix.

Corollaire

Tout espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ a une base.

DÉMONSTRATION

On note X l'ensemble des parties L de E pour lesquelles la famille $(v)_{v \in L}$ est libre.

Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $(X, \subseteq)$. On pose : $M = \bigcup_{L \in \mathscr{C}} L$.

Soit $\{\underbrace{v_1, ..., v_n}_{\text{distincts}}\}$ une partie finie de M. Il existe $L_1, ..., L_n \in \mathscr{C}$ tels que $v_1 \in L_1$, ..., $v_n \in L_n$. Comme $\mathscr{C}$ est une chaîne, on dispose parmi $L_1, ..., L_n$ d'un plus grand élément L_i $(1 \leq i \leq n)$. On a donc $v_1, ..., v_n \in L_i$, ce qui montre que la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre. Ainsi M est libre.

Par conséquent $\mathscr{C}$ est majorée dans $(X, \subseteq)$ par M.

On applique le lemme de Zorn. Il existe un élément maximal B dans $(X, \subseteq)$.

Soit $x \in E$. Comme B est maximal, la partie $B \cup \{x\}$ de E n'est pas libre, ce qui fournit $n \in \mathbb{N}$, $v_1, ..., v_n \in B \cup \{x\}$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. Vu que $(v)_{v \in B}$ est libre, l'un des vecteurs $v_1, ..., v_n$ est égal à x avec un coefficient α_i correspondant non-nul. On obtient ainsi x comme combinaison linéaire de vecteurs de B.

On en conclut que la famille $(v)_{v \in B}$ est une base de E. $\square$