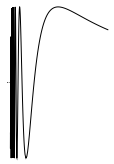
Connexité et non-connexité par arcs : adhérence du graphe de $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ $(x > 0)$

On note X l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe Γ :  *de* $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$.

$x > 0$ *et* $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(a) *La partie X de $\mathbb{R}^2$ est-elle connexe ?*

Le graphe de f est connexe en tant qu'image de l'application continue $]-\infty, 0[\to \mathbb{R}^2$; $x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x})$.

Il en est de même de son adhérence : $\boxed{X \text{ est connexe}}$.

(b) *Est-elle connexe par arcs ?*

On a : $(0,0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n\pi}, f(\frac{1}{2n\pi})\right) \in X$ et $(\frac{1}{\pi}, 0) = (\frac{1}{\pi}, f(\frac{1}{\pi})) \in X$. On suppose, par l'absurde, qu'il existe un chemin γ joignant $(0,0)$ à $(0, \frac{1}{\pi})$ dans X. On va démontrer que l'adhérence du graphe de $f_{\big|]0,\frac{1}{\pi}]}$ ne contient qu'un point de l'axe $(0y)$, de la forme $\gamma(t_0)$, puis on en déduira une contradiction.

On pose : $K = \gamma^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$. On a : K est un fermé non-vide de $[0,1]$. On note $t_0 < 1$ le plus grand élément de K et $I = \mathrm{pr}_{(Ox)}(\gamma(]t_0, 1])))$. On constate que le connexe I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que : $0 \notin I$, $0 = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{pr}_{(Ox)}\left(\gamma(t_0 + \frac{1}{n})\right) \in \overline{I}$ et $\frac{1}{\pi} = \mathrm{pr}_{(Ox)}(\gamma(1)) \in I$. Donc $\left]0, \frac{1}{\pi}\right] \subseteq I \subseteq]0,+\infty[$.

On note $P^+ =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Donc $X \cap P^+$ est l'ensemble des limites u de suites convergentes $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^2$ de points de Γ avec $u \in P^+$. Comme P^+ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$, on a $u_n \in P^+$ pour n grand, puis u est limite dans P^+ d'une suite de points de Γ. Mais Γ d'équation $y - f(x) = 0$ dans P^+ est fermé dans P^+, donc il contient u. Ainsi : $X \cap P^+ = \Gamma$.

Soit (x,y) un point du graphe de $f_{\big|]0,\frac{1}{\pi}]}$. On a : $x \in I$, donc $x = \mathrm{pr}_{(Ox)}(\gamma(t))$ pour un certain $t \in]t_0, 1]$. Or (x,y) et $\gamma(t) \in X \cap P^+$ appartiennent tous deux au graphe de f. Donc $(x,y) = \gamma(t)$. Ainsi le graphe de $f_{\big|]0,\frac{1}{\pi}]}$ est inclus dans $\gamma([t_0, 1])$. Mais $\gamma([t_0, 1])$ est compact donc est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Par conséquent l'adhérence du graphe de $f_{\big|]0,\frac{1}{\pi}]}$ est incluse dans $\gamma([t_0, 1])$.

On récapitule : l'adhérence F du graphe de $f_{\big|]0,\frac{1}{\pi}]}$ est incluse dans $\{\gamma(t_0)\} \cup \gamma(]t_0, 1])$. On obtient une contradiction car $F \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ qui est inclus dans $\{\gamma(t_0)\}$ contient au moins les deux points : $(0,0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n\pi}, f(\frac{1}{2n\pi})\right)$ et $(1,0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, f(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})\right)$.

En conclusion : $\boxed{X \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.

(c) *Les composantes connexes par arcs de X sont-elles fermées dans X ?*

On a : $X = X_0 \cup X^+$ où $X_0 = X \cap (\{0\} \times \mathbb{R})$ et $X^+ = X \cap (]0,+\infty[\times \mathbb{R})$.

Tout d'abord, d'après la démonstration du (b) : $X^+ = \Gamma$. Donc X^+ est connexe par arcs.

Tout point $(0,\theta) \in \{0\} \times [-1,1]$ est limite dans $\mathbb{R}^2$ de la suite $(\frac{1}{\arcsin\theta+2n\pi}, f(\frac{1}{\arcsin\theta+2n\pi}))_{n\geq 1}$. Cela montre que X_0 est égal à $\{0\} \times [-1,1]$. En particulier il est connexe par arcs.

Comme X n'est pas connexe par arcs, ses composantes connexes par arcs sont $\{0\} \times [-1,1]$ et Γ.

Mais $(0,0)$ est adhérent à Γ dans X. D'où : $\boxed{X \text{ a une composante connexe par arcs non fermée}}$.