Complément hors programme : construction de $\mathbb{R}$ (J-Y D)

Ce complément explique pourquoi diverses constructions de $\mathbb{R}$ (dont celle par les « coupures de Dedekind » évoquée à la fin) qui aboutissent à des descriptions différentes, fournissent néanmoins des objets « comparables » (au sens de la seconde partie du théorème énoncé à la fin).

Définition 1

Soient E un ensemble et Γ une partie de $E \times E$. On note « $x \leq y$ » pour « $(x, y) \in \Gamma$ ».

On dit que $\leq$ est une relation d'ordre si :

(i) $\forall x \in E \quad x \leq x$;

(ii) $\forall x, y \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y\big)$;

(iii) $\forall x, y, z \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z\big)$.

Dans ce cas, l'ordre $\leq$ est dit total si :

(iv) $\forall x, y \in E \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

Définition 2

Un corps commutatif est un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux applications

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \quad \text{telles que :}$$

(i) on a $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $x + y = y + x$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(ii) il existe un élément 0 de $\mathbb{K}$ tel que $x + 0 = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ (dans ce cas, cet élément 0 est unique) ;

(iii) pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un élément $-x$ de $\mathbb{K}$ tel que $x + (-x) = 0$ (dans ce cas, cet élément $-x$ est unique) ;

(iv) on a $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ et $x \cdot y = y \cdot x$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(v) il existe un élément 1 de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ (dans ce cas, cet élément 1 est unique) ;

(vi) pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, il existe un élément x^{-1} de $\mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1$ (dans ce cas, cet élément x^{-1} est unique) ;

(vii) on a $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Définition 3

On appelle corps des nombres réels tout corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ telle que :

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \big(x \leq y \implies x + z \leq y + z\big)$;

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \big((0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y\big)$;

(iii) toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure.

Théorème (⋆)

a) Il existe un corps des nombres réels $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$.

b) Pour tout autre corps des nombres réels $(\widetilde{\mathbb{R}},\widetilde{+},\widetilde{\cdot},\widetilde{\leq})$, il existe une unique bijection $\varphi:\mathbb{R}\to\widetilde{\mathbb{R}}$ telle que :

(i) $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad \varphi(x+y)=\varphi(x)\,\widetilde{+}\,\varphi(y)$; $\qquad\leftarrow$(donc $\varphi(0)=\widetilde{0}$)

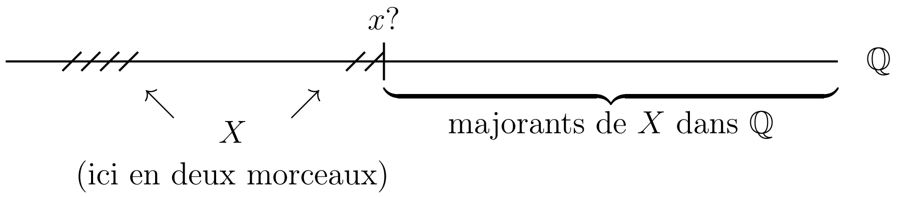
(ii) $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad \varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\,\widetilde{\cdot}\,\varphi(y)$; $\qquad\leftarrow$(donc $\varphi(1)=\widetilde{1}$, car φ est injective)

(iii) $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad \big(x\leq y\ \Leftrightarrow\ \varphi(x)\,\widetilde{\leq}\,\varphi(y)\big)$.

Exemple de construction

On note : Majorées$(\mathbb{Q})=\{X\subseteq\mathbb{Q}\mid X\neq\emptyset$ et X est majorée dans $\mathbb{Q}\}$.

Idée :



Un élément de $\mathbb{R}$ est un ensemble x de parties de $\mathbb{Q}$ tel qu'il existe $X\in$ Majorées$(\mathbb{Q})$ avec :
$x=\big\{X'\in$ Majorées$(\mathbb{Q})\mid\{$majorants de X' dans $\mathbb{Q}\}=\{$majorants de X dans $\mathbb{Q}\}\big\}$.

On note : $x=\dot{0}$ quand $X=\mathbb{Q}^-$.

Quand $x\in\mathbb{R}$ est associé à X et $y\in\mathbb{R}$ est associé à Y, on définit :
$x\leq y\iff\{$majorants de Y dans $\mathbb{Q}\}\subseteq\{$majorants de X dans $\mathbb{Q}\}$;
$x+y=u$, où u est associé à $U:=\{t\in\mathbb{Q}\mid\exists r\in X\ \ \exists s\in Y\ \ t=r+s\}$;
$xy=v$ si $x>\dot{0}$ et $y>\dot{0}$, où v est associé à $V:=\{t\in\mathbb{Q}\mid\exists r\in X\cap\mathbb{Q}^+\ \ \exists s\in Y\cap\mathbb{Q}^+\ \ t=rs\}$.

On admet que ces définitions de « $x\leq y$ », « $x+y$ » et « xy » ne dépendent pas des choix de $X,Y\in$ Majorées$(\mathbb{Q})$ associés à x et y. On prolonge le produit par la règle des signes.

On peut montrer, laborieusement, que ce triplet $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ est un corps des nombres réels.

Remarque

On « identifie » $\mathbb{N}$ à son image par l'injection $\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ fois}}\end{array}$.

On constate que les lois $+$ et $\cdot$ et la relation $\leq$ dans $\mathbb{N}$, sont correctement traduites dans $\mathbb{R}$.

On posera dorénavant (changements de notations) :
$\mathbb{Z}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{N}$ ou $-x\in\mathbb{N}\}$ puis $\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R}\mid\exists p\in\mathbb{Z}\quad\exists q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\quad x=\frac{p}{q}\}$.

(On rappelle les définitions antérieures de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$.
« Axiome de l'infini ». Il existe un ensemble A vérifiant : $(\star)\quad\emptyset\in A$ et $\forall x\in A\quad x\cup\{x\}\in A$.
Avec cet axiome on peut démontrer qu'il existe un plus petit ensemble A vérifiant $(\star)$; on le note $\mathbb{N}$.
On construit ensuite par récurrence l'addition sur $\mathbb{N}$, puis la multiplication sur $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Z}$ est obtenu comme quotient de $\mathbb{N}^2$ en « identifiant » (p,q) et (p',q') à $p-q$ lorsque $p+q'=p'+q$.
$\mathbb{Q}$ est obtenu comme quotient de $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ en « identifiant » (p,q) et (p',q') à $\frac{p}{q}$ lorsque $pq'=p'q$.)

(⋆) Démonstration dans le tome 3 du « Cours de mathématiques spéciales » de Ramis, Deschamps, Odoux.