Rappels de théorie des ensembles (J-Y D)

Tout ce qui suit est extrait du polycopié suivant de Jean-Louis Krivine :
`http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~krivine/articles/LTA-ens.pdf`

Définition-Proposition 1

Soient E et F des ensembles.

(a) Étant donnés $x \in E$ et $y \in F$, on appelle *couple ordonné dont le premier élément est x et le second y* l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. On le note (x, y).

(b) Il existe un ensemble, noté $E \times F$, formé des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

Définition-Proposition 2

Soient E et F des ensembles.

(a) Une *application de E dans F* est un sous-ensemble f de $E \times F$ tel que :

pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$.

Dans ce cas, on notera $f(x)$ l'unique $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in f$.

(b) Il existe un ensemble, noté F^E, formé des applications de E dans F.

Définition-Proposition 3

Soit I un ensemble.

(a) Une famille d'ensembles indexée par I est une application $i \mapsto A_i$ de I dans un ensemble J dont les éléments sont des ensembles. On la note $(A_i)_{i \in I}$. On fixe dans (b) et (c) une telle famille.

(b) Il existe un ensemble, noté $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, dont les éléments sont $\underbrace{\text{« les ensembles »}}_{\text{terme correct pour désigner ici « les points »}}$ qui appartiennent à un des A_i, $i \in I$.

(c) Il existe un ensemble, noté $\prod\limits_{i \in I} A_i$, dont les éléments sont les applications φ de I dans $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ telles que $\varphi(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

Remarques

Soient E et F des ensembles. On pose $A_1 = E$ et $A_2 = F$.

(1) L'application $\varphi \mapsto (\varphi(1), \varphi(2))$ de $\prod\limits_{i \in \{1,2\}} A_i$ dans $E \times F$ est bijective.

(2) On a : $\prod\limits_{x \in E} F = F^E$.