Espaces métriques et espaces topologiques : à retenir (J-Y D)

Définition

On considère un ensemble E.

(a) Une *distance* sur E est une application $d\colon E\times E\to\mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall x,y\in E \quad d(x,y)=0 \iff x=y$;
(ii) $\forall x,y\in E \quad d(x,y)=d(y,x)$;
(iii) $\forall x,y,z\in E \quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On suppose que d est une distance sur E (on dira que (E,d) *est un espace métrique*).
Les *boules ouverte et fermée de centre* $x_0\in E$ *et de rayon* $r>0$ sont :

$$B(x_0,r):=\{x\in E\mid d(x,x_0)<r\} \quad\text{et}\quad \widetilde{B}(x_0,r):=\{x\in E\mid d(x,x_0)\le r\}.$$

Le *diamètre* d'une partie non vide A de E est : $\operatorname{diam} A:=\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y)\le+\infty$.
Par convention : $\operatorname{diam}(\emptyset)=0$. On dit qu'une partie A de E est *bornée* si $\operatorname{diam} A<+\infty$.

Exemple

(a) Soient $E=\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$) et N la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.
La *distance* associée à N est l'application $d\colon E\times E\to\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x,y\in E \qquad d(x,y):=N(x-y).$$

(b) Soient A un ensemble et (E,d) un espace métrique.
On pose : $d_u(f,g):=\min\big(\sup\limits_{x\in A} d(f(x),g(x)),1\big)$ pour $f,g\colon A\to E$.
L'application d_u est une distance sur E^A, appelée *distance de la convergence uniforme.*

Définition-Proposition

(a) Soient (E,d) un espace métrique et F une partie de E.
La *distance induite sur F par celle de E* est la distance $(x,y)\in F\times F\mapsto d(x,y)$ sur F.
La boule ouverte de centre $x_0\in F$ et de rayon $r>0$ dans F est l'intersection avec F de celle de E.

(b) Soient (E_1,d_1) et (E_n,d_n) des espaces métriques.
La *distance produit sur* $E_1\times\ldots\times E_n$ est la distance δ_∞ sur $E_1\times\ldots\times E_n$ définie par :

$$\delta_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i) \quad\text{quand}\quad x=(x_i)_{1\le i\le n} \text{ et } y=(y_i)_{1\le i\le n} \text{ sont dans } \prod_{1\le i\le n} E_i.^{(*)}$$

La boule ouverte de centre $(x_1,\ldots,x_n)$ et de rayon $r>0$ dans $E_1\times\ldots\times E_n$ est $B(x_1,r)\times\ldots\times B(x_n,r)$.

Définition

(a) Un espace topologique est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de X, tels que :
(i) $\emptyset\in\mathscr{T}$ et $X\in\mathscr{T}$;
(ii) l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$;
(iii) la réunion d'une famille quelconque d'éléments de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$.
Dans ce cas, cet ensemble $\mathscr{T}$ s'appelle *la topologie* dont on munit de X.

(b) On se donne ici un espace topologique $(X,\mathscr{T})$ et $a\in X$.
On dit qu'une partie U de X est *ouverte* (ou que U est *un ouvert de* X) si U appartient à $\mathscr{T}$.
On dit qu'une partie F de X est *fermée* (ou que F est *un fermé de* X) si $\complement_X F$ est ouverte.
On dit qu'une partie V de X est *un voisinage de a* si V contient un ouvert U contenant a.
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

(c) On dit qu'un espace topologique $(X,\mathscr{T})$ est séparé (ou que sa topologie est séparée) si pour tous $a,b\in X$ distincts, il existe $U\in\mathcal{V}(a)$ et $V\in\mathcal{V}(b)$ tels que $U\cap V=\emptyset$.

($*$) Les distances $\delta_1\colon(x,y)\mapsto\sum\limits_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)$ et $\delta_2\colon(x,y)\mapsto\big(\sum\limits_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)^2\big)^{\frac12}$ sur $E_1\times\ldots\times E_n$ se comparent à δ_∞ au moyen des inégalités suivantes, qui sont « immédiates » : $\delta_\infty\le\delta_2\le\delta_1\le\sqrt{n}\,\delta_2\le n\,\delta_\infty$.

Proposition

Soit (E,d) un espace métrique. On va construire à partir de d une topologie sur E.

(a) Les réunions de familles quelconques de boules ouvertes de E forment une topologie sur E. Cette topologie est séparée. Toute boule ouverte (resp. boule fermée) est ouverte (resp. fermée).

(b) Une partie U de E est ouverte si et seulement :

$$\boxed{\forall x_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad B(x_0, r) \subseteq U}.$$

Un voisinage d'un point a de E est une partie de E qui contient une boule ouverte centrée en a.

Exemple

On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle $(x,y) \mapsto |x-y|$.

Voici la liste sans répétition des intervalles de $\mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$: $\emptyset$, $]a,b[$ avec $a<b$, $]a,b]$ et $[a,b[$ avec $a<b$, $[a,b]$ avec $a \leq b$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$. Parmi eux, les ouverts sont $\emptyset$, $]a,b[$ avec $a<b$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$; et les fermés sont $\emptyset$, $[a,b]$ avec $a \leq b$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$.

Définition-Proposition

(a) Soient $(X,\mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

On appelle *intérieur de* A la partie $\mathring{A} := \{x \in A \mid A \in \mathcal{V}(x)\}$ de X et *adhérence de* A la partie $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \;\; V \cap A \neq \emptyset\}$ de X. On dit que A *est dense dans* X si $\overline{A} = X$.

On a : $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de X inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A. En particulier : A est ouverte (resp. fermée) si et seulement si $A = \mathring{A}$ (resp. $A = \overline{A}$).

On a aussi : $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$. On appelle *frontière de* A, et note ∂A, le complémentaire de $\mathring{A}$ dans $\overline{A}$. Par ailleurs, on a : $\complement_X \mathring{A} = \overline{\complement_X A}$ et $\complement_X \overline{A} = \widehat{\complement_X A}^{\circ}$.

(b) Soient $(X,\mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

Un point isolé de A est un point de A qui a un voisinage ne contenant pas d'autre point de A.

Un point d'accumulation pour A est un $x \in X$ dont tout voisinage contient un point de $A \backslash \{x\}$.

Ainsi $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble des points d'accumulation pour A.

(c) Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On verra plus tard la définition d'une « suite convergente dans E » (définition connue dans le cas où E est égal à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$).

$\boxed{\text{La partie } \overline{A} \text{ est l'ensemble des limites des suites d'éléments de } A \text{ qui convergent dans } E}^{(\star)}$.

Les points d'accumulations de A sont les $x \in E$ limite d'une suite convergente d'éléments de $A \backslash \{x\}$.

Définition-Proposition

(a) Soient $(X,\mathscr{T})$ un espace topologique et Y une partie de X.

La *topologie induite sur* Y *par celle de* X est la topologie $\mathscr{U} := \{U \cap Y \; ; \; U \in \mathscr{T}\}$ sur Y.
(Lorsque $\mathscr{T}$ provient d'une distance, la topologie induite provient de la distance induite.)
Les ouverts, fermés, voisinages d'un point a de Y dans Y sont les intersections avec Y de ceux de X.
Lorsque la topologie de X est séparée, la topologie induite sur Y est séparée.

(b) Soient $(X_1,\mathscr{T}_1)$, ..., $(X_n,\mathscr{T}_n)$ des espaces topologiques.

La *topologie produit sur* $X_1 \times ... \times X_n$ est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de la forme $U = U_1 \times ... \times U_n$ avec $U_1 \in \mathscr{T}_1$, ..., $U_n \in \mathscr{T}_n$.
(Lorsque $\mathscr{T}_1$, ..., $\mathscr{T}_n$ proviennent de distances, la topologie produit provient de la distance produit.)
Les voisinages d'un point $(a_1, ..., a_n)$ de $X_1 \times ... \times X_n$ sont les parties de $X_1 \times ... \times X_n$ qui contiennent un certain $U_1 \times ... \times U_n$ avec U_1 ouvert de X_1 contenant a_1, ..., U_n ouvert de X_n contenant a_n.
Lorsque les topologies de X_1, ..., X_n sont séparées, la topologie produit sur $X_1 \times ... \times X_n$ est séparée.

hors programme

(c) Soit $((X_i,\mathscr{T}_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques..

La *topologie produit sur* $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de la forme $U = \prod_{i \in I} U_i$ avec $U_i \in \mathscr{T}_i$ pour tout $i \in I$ et l'ensemble $J := \{i \in I \mid U_i \neq X_j\}$ est fini.

$(\star)$ Cette caractérisation, très utile, est *fausse* dans le cas d'un espace topologique quelconque.