

# Suites et applications continues : à retenir (J-Y D)

On considère des espaces métriques  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$ , et des espaces topologiques  $X, Y$  et  $Z$ .

## Définition

(a) On dit qu'une application  $f: E \rightarrow F$  est *continue en*  $a \in E$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad (d_E(x, a) < \alpha \implies d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

On dit qu'une telle application  $f: E \rightarrow F$  est *continue* si elle est continue en tout point de  $E$ .

(b) On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $E$  a pour limite  $l \in E$  quand  $n \rightarrow +\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies d_E(u_n, l) < \varepsilon).$$

signifie que  $d_E(u_n, l) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On notera comme d'habitude «  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  » pour exprimer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  a pour limite  $l$ .

(c) On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $E$  a pour valeur d'adhérence  $\lambda \in E$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \text{ et } d_E(u_n, \lambda) < \varepsilon).$$

## Remarque

On suppose que les espaces métriques produits usuels  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  sont munis de bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

(a) Si  $f: \underset{\text{partie de } \mathbb{R}^p}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^q$  envoie tout  $v \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} \in A$  sur  $f(v) \begin{matrix} f_1(x_1, \dots, x_p) \\ \vdots \\ f_q(x_1, \dots, x_p) \end{matrix} \in \mathbb{R}^q$  et  $a \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix} \in A$ , on a :  
 $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f_1$  et ... et  $f_q$  sont continues en  $(a_1, \dots, a_p)$ .

(b) Si une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^p$  s'écrit  $u_n \begin{matrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{matrix}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $l \begin{matrix} l_1 \\ \vdots \\ l_p \end{matrix} \in \mathbb{R}^p$ , on a :  
 $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  si et seulement si  $x_{1,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1$  et ... et  $x_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_p$ .

## Définition-Proposition

Les deux définitions suivantes (dont découle la dernière) généralisent la définition ci-dessus.

(a) On dit qu'une application  $f: X \rightarrow Y$  est *continue en*  $a \in X$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U) \subseteq V.$$

signifie que  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$

On dit qu'une application  $f: X \rightarrow Y$  est *continue* si elle est continue en tout point de  $X$ .

(b) On se donne  $A \subseteq X$  et  $a \in \bar{A}$  (par exemple  $A = X$  et  $a \in X$ ), et  $l \in Y$ .

On dit qu'une application  $f: A \rightarrow Y$  a pour limite  $l$  quand  $x \rightarrow a$  avec  $x \in A$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U \cap A) \subseteq V. \quad \leftarrow [\text{voisinages dans } Y \text{ et dans } X]$$

On notera «  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} l$  » pour exprimer que  $f$  a pour limite  $l$  quand  $x \rightarrow a$  avec  $x \in A$ .<sup>(\*)</sup>

Dans ce cas et lorsque  $Y$  est séparé, cet élément  $l$  de  $Y$  est unique et noté  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ .

(c) On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $Y$  a pour limite  $l \in Y$  quand  $n \rightarrow +\infty$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \implies u_n \in V).$$

Il s'agit du cas particulier du (b) avec  $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  (donc  $X \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ) et  $A = \mathbb{N}$ .

on prolonge  $u$ . avec une valeur de  $u_{+\infty}$  arbitraire

(\*) Quand  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on obtient les notions de limites finies suivantes :

$x \rightarrow a$  ( $X = A = \mathbb{R}$ ),  $x \xrightarrow{x \neq a} a$  ( $X = \mathbb{R}$  et  $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ),  $x \rightarrow a^-$  ( $X = \mathbb{R}$  et  $A = ]-\infty, a[$ ),  $x \rightarrow a^+$  ( $X = \mathbb{R}$  et  $A = ]a, +\infty[$ ),  $x \rightarrow -\infty$  ( $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $A = \mathbb{R}$ ),  $x \rightarrow +\infty$  ( $X = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $A = \mathbb{R}$ ).

on prolonge  $f$  avec une valeur de  $f(-\infty)$  arbitraire on prolonge  $f$  avec une valeur de  $f(+\infty)$  arbitraire

Dans ces derniers exemples, la topologie de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  est celle qui induit la topologie de  $\mathbb{R}$  et pour laquelle les voisinages de  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ) sont les parties contenant  $]-\infty, \alpha[$  (resp.  $]\alpha, +\infty[$ ) pour un  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

utile plus tard

hors programme

## Remarque

(a) La distance d'un espace métrique est continue (découle de :  $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$ ).

(b) Soient  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$ ,  $f: X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) \subseteq B$ , et  $a \in A$ .

Si  $f$  est continue en  $a$ , alors la restriction  $f|_{A,B}: A \rightarrow B$  qui envoie  $x \in A$  sur  $f(x) \in B$  est continue en  $a$ . La réciproque est vraie lorsque  $A$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$ .

(c) Soit  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ . Si  $u: X \times Y \rightarrow Z$  est continue en  $(x_0, y_0)$ , alors l'application  $u(\cdot, y_0): X \rightarrow Z$  est continue en  $x_0$  et l'application  $u(x_0, \cdot): Y \rightarrow Z$  est continue en  $y_0$ .

(d) Soit  $x_0 \in X$ . Une application  $v: X \rightarrow Y \times Z$  est continue en  $x_0$  si et seulement si

$$x \mapsto (v_1(x), v_2(x))$$

les applications  $v_1: X \rightarrow Y$  et  $v_2: X \rightarrow Z$  sont continues en  $x_0$ .

(e) Soit  $(k, l) \in Y \times Z$ . Une suite  $((v_n, w_n))_{n \geq 0}$  d'éléments de  $Y \times Z$  a pour limite  $(k, l)$  si et seulement si la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  a pour limite  $k$  et la suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  a pour limite  $l$ .

## Proposition

(a) Une application  $f: X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si :

$$\forall V \text{ ouvert de } Y \quad f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } X.$$

On a une caractérisation analogue en remplaçant « ouvert » par « fermé ».

(b) Si  $f: X \rightarrow Y$  est continue en  $a \in X$  et  $g: Y \rightarrow Z$  est continue en  $f(a)$ , alors l'application  $g \circ f: X \rightarrow Z$  est continue en  $a$ .

(c) Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  a pour limite  $b$  dans  $Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$  est continue en  $b$ , alors  $g(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(b)$ .

(d) On se donne  $A \subseteq X$  et  $a \in \bar{A}$ ,  $B \subseteq Y$  et  $b \in \bar{B}$ ,  $l \in Z$ .

Si  $\left\{ \begin{array}{l} f: A \rightarrow Y \text{ vérifie } f(A) \subseteq B \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in A]{} b, \\ g: B \rightarrow Z \text{ vérifie } g(y) \xrightarrow[y \rightarrow b, y \in B]{} l \end{array} \right.$  alors  $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \rightarrow a, x \in A]{} l$ .

## Corollaire

Toute réunion finie de parties de  $X$  de la forme

$$\{x \in X \mid \alpha_1(x) < a_1, \dots, \alpha_p(x) < a_p, \beta_1(x) > b_1, \dots, \beta_q(x) > b_q, \gamma_1(x) \neq c_1, \dots, \gamma_r(x) \neq c_r\}$$

(resp.  $\{x \in X \mid \alpha_1(x) \leq a_1, \dots, \alpha_p(x) \leq a_p, \beta_1(x) \geq b_1, \dots, \beta_q(x) \geq b_q, \gamma_1(x) = c_1, \dots, \gamma_r(x) = c_r\}$ )

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_r: X \rightarrow \mathbb{R}$  continues et  $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$  est ouverte (resp. fermée).

## Définition-Proposition

(a) On dit qu'une application  $f: X \rightarrow Y$  est un *homéomorphisme* si :

$f$  est bijective, et les applications  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues.

(b) On dit qu'une application  $f: E \rightarrow F$  est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in E \quad (d_E(x, y) < \alpha \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Dans ce cas,  $f$  est continue.

(c) Soit  $k \geq 0$ . On dit qu'une application  $f: E \rightarrow F$  est *k-lipschitzienne* si :

$$\forall x, y \in E \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Dans ce cas,  $f$  est uniformément continue.

## Définition

Soit  $E$  un ensemble muni de deux distances  $d_1$  et  $d_2$ . On note  $\text{id}_E: E \rightarrow E$  l'application  $x \mapsto x$ .

(a) On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont *topologiquement équivalentes* si :

$\text{id}_E$  est continue de  $(E, d_1)$  dans  $(E, d_2)$  et de  $(E, d_2)$  dans  $(E, d_1)$ .

(Cela signifie que  $d_1$  et  $d_2$  définissent la même topologie sur  $E$ .)

(b) On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont *uniformément équivalentes* si :

$\text{id}_E$  est uniformément continue de  $(E, d_1)$  dans  $(E, d_2)$  et de  $(E, d_2)$  dans  $(E, d_1)$ .

(c) On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont *Lipschitz-équivalentes* si :

$\text{id}_E$  est lipschitzienne de  $(E, d_1)$  dans  $(E, d_2)$  et de  $(E, d_2)$  dans  $(E, d_1)$ .