

III. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Espaces métriques complets

- 1) On admet que pour toute application injective $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la formule $\delta(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ détermine une distance δ sur \mathbb{R} (généralisation de l'exercice 6 b de la feuille I).
 - a) L'espace métrique (\mathbb{R}, δ) est-il complet quand $\varphi(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$?
 - b) Démontrer que (\mathbb{R}, δ) est complet si et seulement si $\varphi(\mathbb{R})$ est un fermé de \mathbb{R} (distance usuelle).
- 2) On note $\mathbb{C}[[X]]$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni du « produit » $((a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}) \mapsto (\sum_{p+q=n} a_p b_q)_{n \geq 0}$.
On dispose sur $\mathbb{C}[[X]]$ de la distance $d: (a, b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ déterminée par :
 $v((a_n)_{n \geq 0}) = \min\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}$ quand $(a_n)_{n \geq 0} \neq 0$ et $v(0) = +\infty$ (exercice 11 de la feuille I).
 - a) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ de $\mathbb{C}[[X]]$, égal à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, est dense dans $\mathbb{C}[[X]]$.
Indication : vérifier qu'un $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (on le notera donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$).
 - b) Démontrer que $\mathbb{C}[[X]]$ est complet.
- 3) L'application $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Indication : on pourra considérer la suite $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 0}$ et son image par f .

Théorème du point fixe

- 4) Déterminer celles des applications suivantes qui sont contractantes et celles qui ont un point fixe :

$$f_1:]0, 1[\rightarrow]0, 1[; \quad f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_3: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{2}; \quad x \mapsto \frac{x}{2} + 1; \quad x \mapsto \frac{x+2}{x+1}; \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2}$$
- 5) Soit $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application k -contractante.
 - a) Démontrer que l'application $A := \text{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est bijective.
Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y: x \mapsto N(x) + y$.
 - b) Démontrer que l'application A^{-1} est $\frac{1}{1-k}$ -lipschitzienne.
- 6) Soient D_1, \dots, D_k ($k \geq 2$) des droites affines non-parallèles de l'espace affine euclidien \mathbb{R}^n .
Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, on note $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur D_i .^(*)
 - a) Démontrer que l'application $p_1 \circ p_k \circ p_{k-1} \circ \dots \circ p_2$ est contractante.
 - b) En déduire qu'il existe $M_1 \in D_1, \dots, M_k \in D_k$, tels que :
$$p_2(M_1) = M_2, \dots, p_k(M_{k-1}) = M_k, \text{ et } p_1(M_k) = M_1.$$
- 7) Soit $n_0 \geq 1$. On considère une norme $\| \cdot \|$ sur \mathbb{R}^{n_0} et la norme « subordonnée » $\| \| \|$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$:

$$\| \| A \| \| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_0} \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour } A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R}).$$
 Soient $A, N \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ tels que $A = I - N$ et $\| \| N \| \| < 1$, et $B \in \mathbb{R}^{n_0}$.
On verra dans la feuille V que A est inversible. On note $X \in \mathbb{R}^{n_0}$ la solution de $AX = B$.
Soit $X_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$. On définit $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ par : $X^{(0)} = X_0$ et $X^{(n+1)} = NX^{(n)} + B$ pour $n \geq 0$.
Démontrer que $X^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X$ avec $\| \| X^{(n)} - X \| \| \leq \frac{\| \| N \| \|^n}{1 - \| \| N \| \|} \| \| X^{(1)} - X^{(0)} \| \|$ pour tout $n \geq 0$.

(*) Soient $M, N \in \mathbb{R}^n$. Le point $p_i(M)$ est l'unique $M' \in D_i$ tel que $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{D_i}$. D'où : $\overrightarrow{p_i(M)p_i(N)} = \underbrace{\overrightarrow{p_i(MN)}}_{\text{projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \overrightarrow{D_i} \text{ parallèlement à } \overrightarrow{D_i}^\perp}$.

Espaces de Banach

- 8) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme infini sur $[0, 1]$: $\|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?
- b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?
- 9) On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ pour $f \in E$.
- a) Si $n \geq 2$, on détermine $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $f_n|_{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]} = 0$, $f_n|_{[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$ affine, $f_n|_{[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]} = 1$.
Démontrer que $(f_n)_{n \geq 2}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- b) On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ converge dans $(E, \|\cdot\|_1)$ vers un élément f .
Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1| dx = 0$.
- c) En déduire que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.
- 10) a) Soient A un ensemble et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrer que l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ des applications bornées de A dans \mathbb{K} , muni de $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.
- b) On note : $c_0 := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \subseteq l^\infty$.
Démontrer que c_0 , muni $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.
- c) Soit X un espace topologique. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$ formé des applications continues bornées de X dans \mathbb{C} , muni de $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.
- d) Soit $r \in]0, 1[$. On considère $f : \mathcal{C}([-r, r], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([-r, r], \mathbb{R})$ où $\psi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \mapsto \psi \quad x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt + 1$$

 Déduire du théorème du point fixe que f admet un unique point fixe.
 Déterminer ce point fixe par un calcul direct.
- 11) On note $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .
- a) Le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est-il un espace de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$?
- b) On pose : $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
 Démontrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|$ est un espace de Banach.

Complété d'un espace métrique

- 12) Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique (\tilde{E}, \tilde{d}) muni d'une application isométrique $\tilde{i} : E \rightarrow \tilde{E}$ est un *complété* de (E, d) si (\tilde{E}, \tilde{d}) est complet et $\tilde{i}(E)$ est dense dans \tilde{E} .
- a) Décrire, par exemple, un complété de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$.
- b) Soit $x_0 \in E$. Pour tous $x, z \in E$, on pose $\varphi_x(z) := d(x, z) - d(x_0, z)$.
 Démontrer que les φ_x vérifient : $\varphi_x \in (\mathbb{R}^E)_b$ et $\|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = d(x, y)$ pour $x, y \in E$.
 En déduire un complété de (E, d) .
- c) On suppose donnés deux complétés (\tilde{E}, \tilde{d}) et (\tilde{E}', \tilde{d}') de E .
 Démontrer qu'il existe une bijection isométrique $j : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$ telle que $\tilde{i}' = j \circ \tilde{i}$.

Séries absolument convergentes

- 13) Soient $n_0 \geq 1$ et $A, B \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$. On fixe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$ (exercice 7).
- a) Démontrer que la série $(\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!})_{n \geq 0}$ converge dans $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$.
- b) On pose : $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Démontrer que : $\det(\exp A) = e^{\text{tr} A}$.
- c) On suppose que $BA = AB$. Vérifier que : $\exp(A + B) = \exp A \exp B$.
Indication : remarquer que $\sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{A^i B^j}{i! j!}$ pour tout $n \geq 0$.
- d) En déduire que pour toute $A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ antisymétrique, on a : $\exp A \in SO(n_0, \mathbb{R})$.