IV. Compacité. Connexité

Compacité

1) a) Montrer que la partie $A := \left\{\frac{1}{n+1}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$ est compacte.

b) Plus généralement, montrer qu'étant donnée une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite l dans un espace métrique E, la partie $K := \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ de E est compacte.

c) Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F.
Montrer que f est continue si et seulement si $f_{|K}$ est continue pour tout compact K de E.

2) Montrer que la boule unité fermée $\widetilde{B}$ de l'espace vectoriel normé $(l^\infty, \|\ \|_\infty)$ n'est pas compacte.
Indication : trouver une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\widetilde{B}$ telle que $\|f_k - f_l\|_\infty = 1$ quand $k \neq l$

3) a) Démontrer que les intervalles $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.

b) Démontrer que l'intervalle $[0, 1[$ et le cercle unité S^1 de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

4) a) Démontrer que la sphère $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est compacte.

b) Démontrer que la partie $SO(n)$ de $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ formée des matrices carrées d'ordre n qui sont orthogonales et de déterminant 1 (appelée « groupe spécial orthogonal ») est compacte.

5) a) On note : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z = \cos(xy)\}$.
Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \Sigma$ pour lequel z est minimal.

b) Soient M_1, ..., M_p des points de $\mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ qui rend minimal le volume du plus petit parallélépipède rectangle $\Pi_{\mathscr{B}}$ d'arêtes parallèles à u, v, w contenant M_1, ..., M_p.

6) Soit $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\operatorname{Supp}\varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ est compact.
Démontrer que φ est uniformément continue.

7) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^N$.
On définit $A + B := \{a + b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

a) Montrer que si A et B sont compactes, alors la partie $A + B$ de E est compacte.
À titre d'exemple, décrire précisément la partie $S^1 + S^1$ de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors la partie $A + B$ de E est fermée.
Lorsque $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Z}$, peut-on remplacer « A est compacte » par « A est fermée » ?

8) Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F.

a) On suppose que F est compact.
Montrer que : f est continue si et seulement si son graphe Γ est fermé dans $E \times F$.
Indication pour ($\Leftarrow$) : on suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans E mais $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$ dans F et construit une suite convergente $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\geq 0}$ dont les termes sont hors d'une boule $B(f(x), \varepsilon)$.

b) On suppose que E est compact.
Déduire du (a) que : f est continue si et seulement si son graphe Γ est compact.

Connexité

9) a) Démontrer que toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

b) Donner un exemple de partie connexe de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas convexe.

10) a) Le complémentaire de S^1 dans $\mathbb{R}^2$ est-il connexe ?

b) Démontrer que le complémentaire de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs.
Indication : joindre deux points de $\complement_{\mathbb{R}^2}\mathbb{Q}^2$ avec 2 ou 3 segments horizontaux et verticaux.

11) Soient $\arg_1, \arg_2 : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \quad z = |z|\,e^{i\arg_1(z)} = |z|\,e^{i\arg_2(z)}$.
Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \quad \arg_2(z) = \arg_1(z) + 2k\pi$.

12) a) Démontrer que S^1 n'est pas homéomorphe au segment $[0,1]$.

b) Démontrer de même que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

13) a) Démontrer que la sphère S^n est connexe par arcs lorsque $n \neq 0$.
Indication : on pourra faire intervenir la surjection canonique de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ sur S^n.

b) Démontrer que le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ est connexe par arcs.
Indication : quand $n \geq 2$, on pourra utiliser des rotations dans certains plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

14) On considère une partie A d'un espace topologique X.

a) Soit C une partie connexe de X qui rencontre à la fois A et son complémentaire dans X.
Démontrer que C rencontre la frontière de A.

b) Soit γ un chemin joignant un point de A à un point du complémentaire de A dans X.
Démontrer que l'image de γ coupe la frontière de A.

15) Soit A une partie connexe d'un espace topologique X.

a) Démontrer que $\overline{A}$ est connexe.

b) La partie $\mathring{A}$ de X est-elle toujours connexe ?

16) Soient X un espace topologique et $a \in X$.

a) Montrer qu'il existe un plus grand connexe (resp. connexe par arcs) de X contenant a.
On l'appelle *la composante connexe de* a (resp. *la composante connexe par arcs de* a).
On le notera C_a (resp. $\widetilde{C}_a$) dans la suite de cette feuille d'exercices.

b) Montrer que les parties C_x, $x \in X$, sont des fermés de X deux à deux disjoints de réunion X.

c) Montrer que, si les composantes connexes (des points) de X sont en nombre fini, alors elles sont aussi ouvertes de X.

d) Quelles sont les composantes connexes (des points) de $\mathbb{Q}$? Sont-elles ouvertes dans $\mathbb{Q}$?

17) Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in X$.
Démontrer que $\widetilde{C}_a$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$, et en déduire que $\widetilde{C}_a = C_a$.

18) On note X l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\frac{1}{x} \end{array}$.

a) La partie X de $\mathbb{R}^2$ est-elle connexe ?

b) Est-elle connexe par arcs ?

c) Les composantes connexes par arcs de X sont-elles fermées dans X ?