Espaces topologiques compacts : à retenir (J-Y D)

On considère un espace topologique X et un espace métrique E.

Définition

(a) On appelle *recouvrement de* X une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Dans ce cas, un *sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X de la forme $(A_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$.

(b) On dit que l'espace topologique X est *compact* si X est séparé et tout recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X à l'aide d'ouverts U_i a un sous-recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ avec J fini.

(c) On appelle *suite extraite* d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.

Proposition

(a) Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.

Toute partie fermée d'un espace topologique compact est compacte.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est compacte. En particulier, une bijection continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est un homéomorphisme, car elle envoie un fermé sur un fermé.

(c) Un produit de deux espaces topologiques non-vides est compact si et seulement si chacun des deux est compact (« théorème de Tychonoff [Tikhonov] »).

Proposition

(a) L'espace métrique E est compact si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E possède une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge (« théorème de Bolzano-Weierstrass »).

(b) Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue (« théorème de Heine »).

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Les parties compactes de $\mathbb{K}^n$ sont ses parties fermées et bornées pour $\| \ \|_\infty$.

(b) Une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}$ a donc un plus petit élément et un plus grand élément. En particulier, toute application continue d'un espace topologique compact non-vide dans $\mathbb{R}$ prend une plus petite et une plus grande valeur. A fortiori tout espace métrique compact est borné.

(c) Toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.$^{(\star)}$

En particulier, on peut remplacer $\| \ \|_\infty$ dans le (a) ci-dessus par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$.

$(\star)$ Une norme N sur $\mathbb{K}^n$ est $\underbrace{\text{lipschitzienne}}_{\text{grâce à l'inégalité } |N(u)-N(v)|\leq N(u-v)}$ pour $\| \ \|_\infty$ car $N(x) \leq \big(\sum_{1\leq i\leq n} N(e_i)\big)\|x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{K}^n$, où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique, donc son inverse est majoré sur la sphère unité pour $\| \ \|_\infty$ qui est compacte.

Espaces topologiques connexes : à retenir (J-Y D)

On considère un espace topologique X.

Définition

(a) On dit que l'espace topologique X est *connexe* si X n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non-vides.

(b) On appelle *chemin de X d'origine $a \in X$ et d'extrémité $b \in X$* une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

(Quand γ est un chemin de X joignant a à b et δ est un chemin de X joignant b à c, leur *composé* $\gamma\,\delta\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$ *au sens des chemins* est un chemin joignant a à c.)

(c) On dit que l'espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in X$ il existe un chemin de X qui a pour origine a et extrémité b.

Proposition

(a) L'espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante. A fortiori la réunion de connexes de X qui ont un point commun est connexe.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique connexe (resp. connexe par arcs) dans un espace topologique est connexe (resp. connexe par arcs).

(c) Un produit de deux espaces topologiques non-vides est connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si chacun des deux est connexe (resp. connexe par arcs).

Proposition

(a) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Par conséquent, une application continue d'un espace topologique connexe dans $\mathbb{R}$ qui prend des valeurs α et β prend aussi toutes les valeurs entre α et β (« théorème des valeurs intermédiaires »).

(b) Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.