V. Espaces vectoriels normés

Norme

1) Existe-t-il une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge au sens de N si et seulement si elle converge uniformément ?
Indication : étudier la suite de fonctions $\big(f_n\colon x \mapsto \frac{x}{n+1}\big)_{n\geq 0}$.

2) Soient $a_1 > 0$, ..., $a_n > 0$. Les applications suivantes sont-elles des normes ?

$$M\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i|x_i| \end{array} \; ; \quad N\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & \max\limits_{1\leq i\leq n} a_i|x_i| \end{array} \; ; \quad P\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,x_2) & \mapsto & \begin{cases} |x_1| & \text{si } x_1 \neq 0 \\ |x_2| & \text{si } x_1 = 0 \end{cases} \end{array}.$$

3) a) Soient E un espace vectoriel, N une norme sur E et $\varphi : E \to E$ une application linéaire. À quelle condition $x \mapsto N(\varphi(x))$ est-elle une norme sur E ?

b) Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, $N = \|\ \|_1$ et φ est la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{4}$, quelle norme $N \circ \varphi$ obtient-on ?

4) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère une application $N\colon E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$;
(ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda\, v) = |\lambda|\, N(v)$.
On pose $\widetilde{B} := \{v \in E \mid N(v) \leq 1\}$.
Montrer que N est une norme si et seulement si $\widetilde{B}$ est convexe.

5) Toute norme N sur $\mathbb{R}^2$ possède-t-elle la propriété suivante :
$\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \big(|x_1| \leq |y_1| \text{ et } |x_2| \leq |y_2| \Longrightarrow N(x) \leq N(y)\big)$?

6) On pose : $\|(x_1,x_2)\|_{\frac{1}{2}} = (|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}})^2$ pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.
La fonction $\|\ \|_{\frac{1}{2}}$ détermine-t-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

7) Les normes $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ et $P \mapsto \|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$ sur $\mathbb{R}[X]$ sont-elles équivalentes ?

Application linéaire continue

8) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.
Continuité, et lorsque c'est le cas norme, des applications linéaires suivantes ?

$$\varphi_1\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(x_0) \end{array} \text{ où } x_0 \in \mathbb{C} \text{ est fixé} ; \quad \varphi_2\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array} ; \quad \varphi_3\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}.$$

9) On considère l'espace vectoriel $F = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
Continuité, et lorsque c'est le cas norme, des applications linéaires suivantes ?

$$\psi_1\colon \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} ; \quad \psi_2\colon \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} ; \quad \psi_3\colon \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \big(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\big) \end{array}.$$

10) On se place dans $G = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \;\|_\infty$ de la convergence uniforme.
On note H le sous-espace vectoriel de G formé des applications dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Les applications linéaires $A\colon g \in G \mapsto g(0)$ et $B\colon h \in H \mapsto h'(0)$ sont-elles continues ?

11) Soit φ une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \;\|_\infty$.
On suppose que φ prend des valeurs positives sur les fonctions positives.
Montrer que φ est continue.

12) Montrer qu'une forme linéaire f sur un espace vectoriel normé réel E est continue si et seulement si son noyau est fermé.
Indication : quand $f \neq 0$ et $\operatorname{Ker} f$ est fermé, fixer $e \in E$ tel que $f(e) = 1$ puis vérifier que tout $x \in \complement_E \operatorname{Ker} f$ a un multiple dans $e + \operatorname{Ker} f$ donc hors d'une boule ouverte centrée en 0.

13) On fixe une norme $\| \;\|$ sur $\mathbb{R}^{n_0}$, $n_0 \geq 1$. On lui associe la norme $\||\;\||$ sur $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R})$ définie par :
$$|||A||| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_0} \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour } A \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R}).$$
Soit $N \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R})$ tel que $|||N||| < 1$.
a) Prouver que : $I - N$ est inversible et $\sum_{k=0}^{n} N^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (I-N)^{-1}$ (étudier la différence).
b) La série $(\sum N^n)_{n \geq 0}$ est-elle absolument convergente ?

14) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On appelle *norme de Frobenius* et note $\| \;\|_F$ la norme image de la norme $\| \;\|_2$ sur $\mathbb{R}^{n^2}$ par la bijection linéaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ sur $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$:
$$\|A\|_F := \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}).$$
a) Montrer que $\| \;\|_F$ vérifie : $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\,\|B\|_F$ pour tous $A, B \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\| \;\|_F$ n'est pas issue, comme dans l'exercice précédent, d'une norme $\| \;\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Espaces de suites

15) Démontrer qu'il existe une forme linéaire non-continue sur l^2.
Indication : on admet que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel a un supplémentaire.

16) On note : $c_0 := \big\{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\big\}$.
On munit ce sous-espace vectoriel de l^∞ de la norme $\| \;\|_\infty$.
Montrer qu'on définit une bijection linéaire qui conserve la norme $\Phi\colon l^1 \to (c_0)'$ en posant :
$\Phi(y) = f_y$ pour tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in l^1$, où $f_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ quand $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$.
Indication : associer à un $f \in (c_0)'$ la suite $y = (y_n)_{n\geq 0} := \big(f(\delta_n)\big)_{n\geq 0}$ $^{(\star)}$ et majorer la valeur de f au point $x^{(m)} := \sum_{\substack{0\leq k\leq m \\ y_k \neq 0}} \frac{|y_k|}{y_k}\,\delta_k$ $(m \in \mathbb{N})$ en utilisant la continuité de f.

Application bilinéaire continue

17) On considère le produit terme à terme de deux suites bornée, lui-même borné :
$$\pi\colon \begin{array}{ccc} l^\infty \times l^\infty & \longrightarrow & l^\infty \\ \big((x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\big) & \longmapsto & (x_n y_n)_{n\geq 0} \end{array}.$$
Ce produit π est-il continu ?

$(\star)$ À chaque $n \in \mathbb{N}$, on associe : $\delta_n = \Big(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n^{\text{ème}}\text{ terme}}, 0, \ldots\Big)$.