

Espaces vectoriels normés : à retenir (J-Y D)

Soient E, F , et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

(a) Une *norme* sur E est une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

(i) $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$;

(ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(iii) $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1. \quad (*)$$

(c) La *distance* associée à une norme N sur E est l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) := N(x - y). \quad (**)$$

Exemple 1 (espaces de fonctions réelles ou complexes)

(a) On définit une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, qui « s'identifie » à l'espace des applications polynomiales de \mathbb{K} dans \mathbb{K} , en posant : $N(P) := \int_0^1 |P(t)| dt$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$

(b) Soit A un ensemble. On définit une norme $\| \cdot \|_\infty$ sur l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ formé des applications bornées de A dans \mathbb{K} en posant : $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$ pour tout $f \in (\mathbb{K}^A)_b$.

Rappel

Soit A un ensemble. On pose : $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)| \leq +\infty$ pour toute application $f: A \rightarrow \mathbb{K}$.

(a) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans \mathbb{K} *converge simplement* vers une application f de A dans \mathbb{K} si : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in A$.

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans \mathbb{K} *converge uniformément* vers une application f de A dans \mathbb{K} si : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Dans ce cas $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f .

Exemple 2 (espaces de suites de nombres complexes)

(a) On note : $l^\infty := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \underbrace{\|(a_n)_{n \geq 0}\|_\infty}_{\text{au sens du rappel}} < +\infty\}$ l'espace vectoriel des suites bornées.

L'application $\| \cdot \|_\infty$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe l^∞ .

(b) Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose : $\|(a_n)_{n \geq 0}\|_p := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \leq +\infty$ pour tout $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On note : $l^p := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \|(a_n)_{n \geq 0}\|_p < +\infty\}$.

L'application $\| \cdot \|_p$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe l^p .

Cas particulier (suites de nombres complexes nulles à partir du $n + 1^{\text{ème}}$ terme)

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$,
 $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$, et $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Chacune des applications $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, et $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel \mathbb{K}^n .

(*) On verra plus tard que toutes les normes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

(**) Des distances d_1 et d_2 associées à des normes N_1 et N_2 sur E sont topologiquement équivalentes (resp. uniformément équivalentes, Lipschitz-équivalentes) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Définition

On se donne une norme $\| \cdot \|_E$ sur E .

(a) Soient $a, b \in E$. Le *segment* $[a, b]$ est l'ensemble suivant : $[a, b] := \{a + t(b - a) ; t \in [0, 1]\}$.

(b) On dit qu'une partie U de E est *convexe* si : $[a, b] \subseteq U$ pour tous $a, b \in U$.

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$ sur E et F .

L'espace vectoriel produit $E \times F$, formé des couples (v, w) avec $v \in E$ et $w \in F$, est muni de la *norme 2 du produit* $\| \cdot \|_{E \times F}$ définie par : $\|(v, w)\|_{E \times F} := \sqrt{\|v\|_E^2 + \|w\|_F^2}$ pour tout $(v, w) \in E \times F$. (*)

Définition-Proposition

On se donne une norme $\| \cdot \|_E$ sur E .

(a) Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E converge vers un élément a de E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\|x_n - a\|_E < \varepsilon$ dès que $n > N$.

(b) On dit qu'une série $(\sum a_n)_{n \geq 0}$ dans E , c'est à dire une suite de la forme $((a_n)_{n \geq 0}, (\sum_{k=0}^n a_k)_{n \geq 0})$ avec $a_n \in E$ pour tout $n \geq 0$, converge absolument si la série $(\sum \|a_n\|_E)_{n \geq 0}$ converge dans \mathbb{R} .

Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F, \| \cdot \|_G$ sur E, F, G , et deux normes N_1 et N_2 sur E .

(a) Une application linéaire $u: E \rightarrow F$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

Ainsi N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $\text{id}_E: (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est bicontinue.

(b) Lorsque E est de dimension finie : toute application linéaire de E dans F est continue (une base (e_1, \dots, e_n) de E fournit une norme $N: \sum x_i e_i \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ qui s'avère équivalente à $\| \cdot \|_E$).

(c) Une application bilinéaire $\pi: E \times F \rightarrow G$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|\pi(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

(d) La somme de $E \times E$ dans E et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont des applications continues (cas particuliers respectivement de (a) et de (b)).

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F$, et $\| \cdot \|_G$ sur E, F , et G .

(a) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de E dans F . On pose : $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. C'est le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires continues.

(b) On définit une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{L}(E, F)$ en posant :

$$\|u\| := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \text{ pour tout } u \in \mathcal{L}(E, F). \quad (**)$$

(ce sup dans \mathbb{R}^+ vaut par convention 0 quand $E = \{0\}$)

En particulier, on a : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$, alors $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$.

(c) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$.

(*) Comme les normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$, et $\| \cdot \|_\infty$ sur \mathbb{R}^2 sont équivalentes, cette norme $\| \cdot \|_{E \times F}$ est équivalente aux normes $(v, w) \mapsto \|v\|_E + \|w\|_F$ et $(v, w) \mapsto \max(\|v\|_E, \|w\|_F)$ sur $E \times F$.

(**) Le nombre $\|u\|$ est donc le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant : $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.