VI. Différentielle. Formules de Taylor.

Différentielle

1) On considère $f_1, f_2, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ \text{ou} & \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x|\leq|y| \\ \text{ou} & \\ y^2 & \text{si } |x|>|y| \end{cases}.$$

a) Les applications f_1 et f_2 sont-elles différentiables en $(0,0)$?

b) L'application g est-elle différentiable ?

2) On admet que l'application $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3\,y - x\,y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ \text{ou} & \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}$ vérifie :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4\,y + 4x^2\,y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3\,y^2 - x\,y^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0).$$

a) Prouver que h est de classe C^1 et $\mathrm{d}h(0,0) = 0$.

b) Que vaut $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t,\frac{1}{t})\big)_{t=1}$?

c) Calculer $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial h}{\partial y}\big)(0,0)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial h}{\partial x}\big)(0,0)$. Que peut-on en conclure ?

3) Soient F_1, ..., F_n, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et $\pi\colon F_1 \times \cdots \times F_n \to G$ une application n-linéaire.

a) Montrer que π est de classe C^∞.

b) Vérifier que $\|\pi\| := \sup\limits_{y_1\neq 0,\, \dots,\, y_n\neq 0} \frac{\|\pi(y_1,\dots,y_n)\|}{\|y_1\|\cdots\|y_n\|}$ est fini.

c) Calculer $\mathrm{d}\pi$.

4) On considère l'application $N\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \|v\|_2 \end{array}$.

a) L'application N est-elle différentiable ? l'application $N_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ est-elle deux fois-différentiable ?

b) Calculer $\mathrm{d}N(a)\cdot u$ et $(\mathrm{d}^2N(a)\cdot u)\cdot v$ quand $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ et $u = (h,k), v = (r,s) \in \mathbb{R}^2$.

5) Prouver la différentiabilité des applications suivantes et calculer leur différentielle :

$a\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$ (utilisation de l'exercice 3 ou calcul des dérivées partielles) ;

$b\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMM \end{array}$ (définition de $\mathrm{d}b(M)$ ou formule de différenciation d'un produit) ;

$c\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \longmapsto & \frac{v}{\|v\|_2^2} \end{array}$ (calcul des dérivées partielles ou formule de différenciation d'un produit).

6) a) Vérifier tout d'abord que $GL(n,\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.
Montrer que l'application $j\colon \begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$ est de classe C^∞.

b) Calculer $\mathrm{d}j$ (différentier l'égalité $MM^{-1} = I$, $M \in GL(n,\mathbb{R})$).

c) Calculer d^2j (différentier en M l'égalité donnant $\mathrm{d}j(M)\cdot H$, $M \in GL(n,\mathbb{R})$ et $H \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$).

Formules de Taylor

7) a) Soient $f_n \colon \underset{\substack{\text{ouvert convexe d'un} \\ \mathbb{R}\text{-evn } E \text{ de dim finie}}}{U} \longrightarrow \underset{\substack{\mathbb{R}\text{-evn} \\ \text{de dim finie}}}{F}$, $n \in \mathbb{N}$, des applications différentiables telles que : la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément et il existe $x_0 \in U$ pour lequel la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge.

Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{d}f(x)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in U$ et $h \in E$.

Indication : poser $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(x)$, puis utiliser les égalités
$f_p(x) - f_q(x) = \big((f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\big) + (f_p(x_0) - f_q(x_0))$ et
$f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h = \lim\limits_{p\to+\infty} \big((f_p - f_q)(a+h) - (f_p - f_q)(a)\big) + \big(f_q(a+h) - f_q(a) - \mathrm{d}f_q(a)\cdot h\big) + \big(\mathrm{d}f_q(a) - g(a)\big)\cdot h.$

b) Montrer qu'on définit une application différentiable $\exp\colon \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ en posant :

$$\exp M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} \quad \text{pour tout} \quad M \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C}).$$

Calculer $\mathrm{d}\exp(X)\cdot H$ pour tous $M, H \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$.

Indication : utiliser sur $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ une norme $\|\ \|$ associée à une norme donnée sur $\mathbb{C}^{n_0}$.

c) En déduire que, pour tous $A \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ et $X_0 \in \mathbb{C}^{n_0}$, l'équation différentielle

$$(\star) \quad X' = AX \quad \text{et} \quad X(0) = X_0$$

d'inconnue $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n_0}$ dérivable a pour unique solution $X(t) := \mathrm{e}^{tA}X_0$, $t \in \mathbb{R}$.(*)

Indication : pour toute solution Y de $(\star)$, la dérivée de $Z\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}Y(t)$ est nulle.

8) On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y + 1 > 0\}$ et $f(x,y) = \ln(x^2+y+1)$ pour $(x,y) \in U$.
Donc f est C^∞ et : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y+1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y+1}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(-x^2+y+1)}{(x^2+y+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x)}{(x^2+y+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2+y+1)^2}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{4x(x^2-3y-3)}{(x^2+y+1)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2(3x^2-y-1)}{(x^2+y+1)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{4x}{(x^2+y+1)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{2)}{(x^2+y+1)^3}$.

a) Quel majorant de $\left|f(\frac{11}{10}, \frac{21}{10}) - f(1,2)\right|$ obtient-on avec l'inégalité des accroissements finis ?

b) Écrire le développement de Taylor-Young de $f(x,y)$ à l'ordre 2 quand (x,y) tend vers $(1,2)$.
Indication : utiliser le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+h)$ quand $h \to 0$.

c) Majorer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, la valeur absolue du reste $R(x,y)$ du développement précédent, quand (x,y) appartient à la partie $[0{,}9;1{,}1] \times [1{,}9;2{,}1]$ de U.

d) Construire, à l'aide du théorème de Taylor avec reste intégral, des applications $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de $\mathbb{R} \times \left]-1,+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$R(x,y) = \alpha(x,y)\,(x-1)^3 + \beta(x,y)\,(x-1)^2(y-2) + \gamma(x,y)\,(x-1)(y-2)^2 + \delta(x,y)\,(y-2)^3$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-1,+\infty\right[$.

9) On considère $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$.

a) Montrer que : si f a un minimum en a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$ et $(\forall h \in \mathbb{R}^n \ \ \mathrm{d}^2 f(a)\cdot h^2 \geq 0)$.

b) On suppose dans cette question que U est convexe.
Montrer que : si $\mathrm{d}f(a) = 0$ et $(\forall x \in U \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n \ \ \mathrm{d}^2 f(x)\cdot h^2 \geq 0)$, alors f a un minimum en a.

10) Soients $u\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{\Omega} \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ de classe C^∞.
On suppose que u s'annule en tout point du graphe de φ.

a) Construire une application $v\colon \Omega \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^∞. vérifiant :

$$u(x,y) = \langle y - \varphi(x), v(x,y)\rangle \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^q.$$

Indication : appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0 à $u(x,\cdot)$ en $\varphi(x)$.

b) Quel résultat (classique) obtient-on en prenant $p = 0$?

(*) Ce résultat peut se démontrer directement et plus simplement en utilisant le théorème « convergence uniforme + dérivabilité » enseigné dans le cours MM4 de L2.