

Différentielle, formules de Taylor : à retenir (J-Y D)

Soient E, E_1, \dots, E_l et F, F_1, \dots, F_m, G des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie. On fixe des bases $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ de E , $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_q)$ de F , et $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_r)$ de G .

Définition-Proposition

On considère une application $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ et $a \in U$.

(a) On dit que f est *différentiable en a* s'il existe $l \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|). \leftarrow [\text{signifie ici : } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a) - l(h)}{\|h\|} = 0]$$

Dans ce cas, on note $df(a) := l$ (unique) et obtient :

$$f \text{ est continue en } a \text{ et } \underbrace{df(a)(h)}_{\text{noté } df(a) \cdot h} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \text{ pour tout } h \in E, \leftarrow [df(a) \cdot h = f'(a)h \text{ si } E = \mathbb{R}]$$

puis on appelle *dérivées partielles de f en a* les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tu_j) - f(a)}{t}$ quand $1 \leq j \leq p$.

(b) On dit que f est *différentiable* si elle est différentiable en tout point de U .

Dans ce cas, on appelle *différentielle de f* l'application $df: x \in U \mapsto df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit par récurrence l'ensemble des applications n -fois différentiables de U dans F ($n \in \mathbb{N}$).

On dit que f est de classe C^n quand f est n -fois différentiable et $d^n f$ est continue.

Exemple

Toute application linéaire (continue) $l: E \rightarrow F$ est différentiable et $dl(a) = l$ pour tout $a \in E$.

Proposition signifie que $\tilde{f}: (x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x), \dots, f_q(x))$ est diff. en (a_1, \dots, a_p) , où $x = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p$ et $a = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p$

a) Si une application $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ est différentiable en un point a de U , elle vérifie :

$$\underbrace{\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}}_{\text{can. } d\tilde{f}(a_1, \dots, a_p)} df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où } f(x) \Big|_{\mathcal{C}} \begin{matrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := \frac{d}{dt} f_i(a + tu_j) \Big|_{t=0}}$$

D'où : $\boxed{df(a) \cdot h = ((h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})f)(a)}$ pour $h = h_1 u_1 + \dots + h_p u_p \in E$.

complément au cours

(b) Une application $f: \underset{\text{ouvert de } E_1 \times \dots \times E_l}{U} \longrightarrow F_1 \times \dots \times F_m$ est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_l) \in E_1 \times \dots \times E_l$ si et seulement si f_1, \dots, f_m sont différentiables en a .

Dans ce cas, on a : $df(a) \cdot h = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_l f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_l f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix}$ pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix} \in E_1 \times \dots \times E_l$

où $\partial_j f_i(a)$ est la différentielle en a_j de l'application $x_j \mapsto f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_l)$.

(c) Soient $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$ et $g: \underset{\text{ouvert de } F}{\text{contenant } f(U)} V \longrightarrow G$ différentiable en $f(a)$.

L'application $g \circ f$ est différentiable en a , avec :

$$\boxed{d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)} \quad \text{ce qui donne matriciellement} \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^q \underbrace{\frac{\partial z_i}{\partial y_k}}_{\text{coordonnées de } z = g(y)} \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_j}}_{\text{coordonnées de } y = f(x)}$$

(en se plaçant aux points adéquats) pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq p$.

Proposition

On considère une application $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, $a \in U$, et $n \geq 1$.

(a) On suppose que f est différentiable et que $d^2 f(a)$ est définie.

Dans ce cas : $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ (« théorème de Schwarz »).

(b) On a : $\boxed{f \text{ est de classe } C^n \text{ si et seulement si } f \text{ a des dérivées partielles } n^{\text{èmes}} \text{ continues.}}$

complément au cours

Proposition

On se donne une application m -linéaire $\pi: F_1 \times \dots \times F_m \rightarrow G$ (« produit »).
 $(y_1, \dots, y_m) \mapsto y_1 \cdot \dots \cdot y_m$

Si des applications $f_k: U \rightarrow F_k$ avec $1 \leq k \leq m$ sont différentiables en a , alors l'application $f_1 \cdot \dots \cdot f_m: U \rightarrow G$ est différentiable en a , et pour tout $h \in E$ on a :

$$d(f_1 \cdot \dots \cdot f_m)(a) \cdot h = (df_1(a) \cdot h) \cdot f_2(a) \cdot \dots \cdot f_m(a) + \dots + f_1(a) \cdot \dots \cdot f_{m-1}(a) \cdot (df_m(a) \cdot h).$$

Exemple (généralisable au cas de la différentielle $n^{\text{ème}}$)

Soient $f: U \rightarrow F$ deux fois différentiable, $a \in U$ et $h, k \in E$.

On calcule $(d^2 f(a) \cdot h) \cdot k$ en différentiant $df(x) \cdot k$ au point $x = a$ et prenant la valeur en h :

$$(d^2 f(a) \cdot h) \cdot k = \left((h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p}) (k_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + k_p \frac{\partial}{\partial x_p}) f \right)(a) \text{ pour } h = \sum_{j=1}^p h_j u_j \in E \text{ et } k = \sum_{j=1}^p k_j u_j \in E.$$

Proposition (« inégalité des accroissements finis ») ← [il n'y a pas de « théorème des accroissements finis » ici]

Soient $f: U \rightarrow F$ différentiable, $a \in U$ et $h \in E$.

Si $[a, a+h] \subseteq U$, on a :

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \|df(a+th)\|}_{\leq +\infty} \times \|h\|.$$

En particulier, quand U est connexe : f est constante si et seulement si $df = 0$.

hors programme

Théorème (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n: U \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, des applications vérifiant :

- (i) les applications f_n , $n \in \mathbb{N}$ sont différentiables ;
- (ii) il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$ converge ;
- (iii) la suite $(df_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U , vers une fonction différentiable f telle que : $df(x) \cdot h = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} df_n(x) \right) \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} (df_n(x) \cdot h)$ pour $x \in U$ et $h \in E$.

Théorème (« théorème de Taylor-Young »)

Soient $f: U \rightarrow F$ $n-1$ -fois différentiable ($n \geq 1$), et $a \in U$ tel que $d^n f(a)$ est définie.

On a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df(a)}{1!} \cdot h + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} \cdot h^n + o(\|h\|^n)$$
 (avec unicité du DL_n),

où $d^n f(a) \cdot h^n := \underbrace{(\dots (d^n f(a) \cdot h) \dots)}_{\text{application } n\text{-linéaire symétrique de } E \text{ dans } F} \cdot h = \left((h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_p \frac{\partial}{\partial x_p})^n f \right)(a)$ quand $\begin{matrix} h \\ \vdots \\ h_p \end{matrix} \in E$.
à développer par la formule du binôme

Théorème (« inégalité de Taylor-Lagrange »)

← [il n'y a pas de « théorème de Taylor-Lagrange » ici]

Soient $f: U \rightarrow F$ $n+1$ -fois différentiable ($n \geq 0$), $a \in U$ et $h \in E$.

Si $[a, a+h] \subseteq U$:

$$\left\| f(a+h) - \left(f(a) + \frac{df(a)}{1!} \cdot h + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} \cdot h^n \right) \right\| \leq \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \frac{d^{n+1} f(a+th)}{(n+1)!} \right\|}_{\leq +\infty} \times \|h\|^{n+1}.$$
Théorème (« formule de Taylor avec reste intégral »)

Soient $f: U \rightarrow F$ de C^{n+1} ($n \geq 0$), $a \in U$ et $h \in E$.

Si $[a, a+h] \subseteq U$:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df(a)}{1!} \cdot h + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} \cdot h^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(a+th) \cdot h^{n+1} dt.$$