VII. Extremums locaux. Inversion locale

Extremums locaux

1) Déterminer les extremums locaux des applications suivantes, où $\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3$:

$$a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z) \end{array} \quad ; \quad b\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x \end{array} \quad ; \quad c\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x^4 - 4x^2y + y^2 \end{array}.$$

2) On considère le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et l'application

$$u\colon \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 8\sqrt{1-x^2-y^2} + 5x^2 \end{array}.$$

a) Montrer que u est bornée et atteint ses bornes.

b) Déterminer les bornes de u ainsi que les points où u les atteint.

c) Étudier la nature des points critiques de u dans le disque ouvert $\mathring{D}$.

3) On considère l'application $v\colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x\,y}{(1+x)(1+y)(x+y)} \end{array}.$

a) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Montrer que : $v(x,y) < x$ et $v(x,y) < y$ et $v(x,y) < \frac{1}{x}$ et $v(x,y) < \frac{1}{y}$.

b) En déduire que v prend une plus grande valeur.

c) Déterminer le maximum de v.

4) On pose : $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{x^2+xy+y^2}}{xy}$ pour $(x,y) \in U$.

a) Démontrer que f est convexe sur U.$^{(\star)}$

Indication : appliquer à $\ln \circ f$ le critère de convexité avec la différentielle seconde (exp croît).

b) Démontrer que f a un minimum sur U et calculer ce minimum.

Indication : appliquer à f le critère de convexité avec la différentielle première.

5) On se donne $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ et pose $g(x) = \|x-a\|_2 + \|x-b\|_2 + \|x-c\|_2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Vérifier que $g(x) \underset{\|x\|_2 \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et en déduire que g a un minimum global.

Indication : on pourra par exemple considérer la partie $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq g(0)\}$ de $\mathbb{R}^n$.

b) Démontrer que l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe.

c) Démontrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a,b,c\}$ est point critique de g, alors g atteint son minimum en x.

Indication : supposer par l'absurde que $y \in \mathbb{R}^n$ vérifie $g(y) < g(x)$ puis passer à la limite $t \to 0^+$ dans l'inégalité $\frac{g((1-t)x+ty)-g(x)}{t} \leq g(y) - g(x)$.

d) Déterminer le minimum de g quand $n = 3$ et (a,b,c) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$(\star)$ (a) Soit f une application d'un convexe C de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si :

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)\,f(x) + t\,f(y) \qquad \text{pour tous } x, y \in C \text{ et } t \in [0,1]\,;$$

(b) Soit f une application différentiable d'un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
L'application f est convexe si et seulement si : $f(y) - f(x) \geq \mathrm{d}f(x)\cdot(y-x)$ pour tous $x, y \in U$.

(c) Soit f une application deux fois différentiable d'un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
L'application f est convexe si et seulement si : $\mathrm{d}^2 f(x)\cdot h^2 \geq 0$ pour tous $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Inversion locale

6) a) Montrer que l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\,]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\times\,]-1,1[\\ (x,y) & \longmapsto & (x-y\sin x, y) \end{array}$ est un C^1-difféomorphisme.

b) Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ associée à une norme donnée sur $\mathbb{R}^n$.
On considère une application $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|\mathrm{d}N(x)\| < 1$.
Démontrer que l'application $A := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y\colon x \mapsto N(x) + y$.

7) On considère l'application $F\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2, x^3-y^3) \end{array}$.

a) Au voisinage de quels points l'application F se restreint-elle en un C^1-difféomorphisme ?

b) Pour chaque solution (x_0, y_0) de l'équation
$$(E): \ \ x^2+y^2 = 2 \ \text{ et } \ x^3 - y^3 = 0,$$
donner une approximation à l'ordre 1 en 0 par rapport à ε de la solution de l'équation
$$(E_\varepsilon): \ \ x^2+y^2 = 2-\varepsilon \ \text{ et } \ x^3 - y^3 = \varepsilon$$
qui est « voisine de (x_0, y_0) ».

8) On considère l'application $K\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 \end{array}$.

a) Existe-t-il une réciproque locale de classe C^1 de K qui envoie $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$? sur $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$?

b) Prouver que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ est isolé dans $K^{-1}\big(\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}\big)$ et que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ n'est pas intérieur à $K^{-1}\big(\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}\big)$.

9) a) Montrer qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, et des applications $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$ et $y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, vérifiant :
$$(*) \qquad x(0,0) = y(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(u,v)^3 + y(u,v)^2 + u\,x(u,v) = 2 \\ y(u,v)^3 - v\,x(u,v)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } \ (u,v) \in \Omega.$$

b) Calculer les développements limités à l'ordre 1 de x et de y en $(0,0)$.

10) On pose : $P_{a,b,c} = X^3 + aX^2 + bX + c$ pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Soient $a_0, b_0, c_0, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $P_{a_0,b_0,c_0}(x_0) = 0$.
À quelle condition existe-t-il un voisinage ouvert Ω de (a_0,b_0,c_0) dans $\mathbb{R}^3$ et une application $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tels que :
$$(**) \qquad x(a_0,b_0,c_0) = x_0 \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}\big(x(a,b,c)\big) = 0 \quad \text{pour tout } (a,b,c) \in \Omega\,?$$

b) Trouver une approximation à l'ordre 2 en (h,k) d'une des trois racines de X^3+pX+q, à choisir parmi $x(0,p,q) < y(0,p,q) < z(0,p,q)$, lorsque $p = -1+h$ et $q = k$ avec $(h,k) \to (0,0)$.

c) On pose $U := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid P_{a,b,c}$ a 3 racines réelles distinctes$\}$.
On introduit $\rho\colon \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto & (x,y,z) \end{array}$ où x, y, z sont les racines de $P_{a,b,c}$ avec $x < y < z$.
Montrer que U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et que l'application ρ se restreint (à l'arrivée) en un C^1-difféomorphisme ρ_0 de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$.