

Extremums locaux : à retenir (J-Y D)

Soient X un espace topologique et E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie p .

Définition

Soient $A \subseteq X$, f une application de A dans \mathbb{R} , et $a \in A$.

(a) On dit que f admet *un maximum global (resp. un minimum global) au point a* si :

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } \forall x \in A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(b) On dit que f admet *un maximum local (resp. un minimum local) au point a* si :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } \exists V \in \mathcal{V}(a) \quad \forall x \in V \cap A \quad f(x) \geq f(a)).$$

(c) On dit que f admet *un extremum global (resp. un extremum local) au point a* si f admet au point a un maximum global ou un minimum global (resp. un maximum local ou un minimum local).

Définition-Proposition

Soient U un ouvert de E , f une application de U dans \mathbb{R} , et $a \in U$.

On suppose que f est différentiable en a .

(a) On dit que f admet *un point critique au point a* si $df(a) = 0$.

(b) Si f admet un extremum local en a , alors f admet un point critique en a .

Définition

Soient $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $d^2f(a)$ est définie.

On suppose que f admet un point critique en a .^(*)

(a) On appelle *matrice hessienne de f en a dans une base \mathcal{B} de E* la matrice symétrique :

$$\text{Hess } f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{h \mapsto d^2f(a) \cdot h^2}_{\text{forme quadratique sur } E}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où } (x_k)_{1 \leq k \leq p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathcal{B}.$$

(b) On appelle *signature de f en a* la signature (s, t) de la forme quadratique $\text{Hess } f(a)$.

On dit que le point critique a de f est *non dégénéré* si la matrice $\text{Hess } f(a)$ est inversible.

Proposition

Soient $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, et $a \in U$ tel que $d^2f(a)$ est définie.

On suppose ici que f admet un point critique en a .

(a) Si f admet un minimum local (resp. maximum local) en a , alors la forme quadratique $\text{Hess } f(a)$ est positive (resp. négative). ← signifie que $(s, t) = (k, 0)$ (resp. $(s, t) = (0, k)$) pour un certain $k \in \{0, 1, \dots, p\}$

(b) Si la forme quadratique $\text{Hess } f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum local (resp. maximum local) en a . ← signifie que $(s, t) = (p, 0)$ (resp. $(s, t) = (0, p)$)

Remarque (très utile)

Une matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, p\}. \quad (**)$$

(*) Cette hypothèse sera indispensable quand on voudra définir *la forme quadratique hessienne* d'une application f allant d'une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , sur l'espace tangent d'un point (critique) a .

(**) Pour l'implication délicate, on pose $\varphi(X, Y) := {}^t XAY$ quand $X, Y \in \mathbb{R}^p$ et raisonne par récurrence finie sur k . Soient $k \in \{1, \dots, p\}$ et (v_1, \dots, v_k) une base φ -orthonormée de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. On fixe v non-nul dans le φ -orthogonal de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ (droite). On a $v \notin \mathbb{R}^k \times \{0\}$ puis $\varphi(v, v) > 0$ au vu de la matrice de φ dans (v_1, \dots, v_k, v) . La base $(v_1, \dots, v_k, \frac{v}{\sqrt{\varphi(v, v)}})$ de $\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\}$ est φ -orthonormée. Variante : $\varphi|_{(\mathbb{R}^{k+1} \times \{0\})^2}$ a pour signature $(k+1, 0)$.

Inversion locale et fonctions implicites : à retenir (J-Y D)

Soient E, F, G des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$, et $a \in U$ tel que $df(a)$ est définie.

(a) On appelle *matrice jacobienne de f en a dans des bases \mathcal{B} de E et \mathcal{C} de F* la matrice :

$$J_f(a) := \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{où } f(x) \begin{array}{l} \Big|_{\mathcal{B}} \\ \vdots \\ \Big|_{\mathcal{C}} \end{array} \begin{array}{l} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{array} \text{ et } (x_j)_{1 \leq j \leq p} \text{ sont les coordonnées suivant } \mathcal{B}.$$

(b) On appelle *rang de f en a* le rang de $df(a)$, c'est-à-dire le rang de $J_f(a)$.^(*)

Quand $p = q$, on appelle *jacobien de f en a* le nombre réel $\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a) := \det J_f(a)$.

Définition

On dit qu'une application $\varphi: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ est un *C^n -difféomorphisme* si :

φ est une bijection, φ est de classe C^n , et φ^{-1} est de classe C^n .

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n et $a \in U$.

Si $df(a)$ est bijective, alors il existe un ouvert U_0 de E contenant a inclus dans U et un ouvert V_0 de F contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^n -difféomorphisme $f_0: U_0 \rightarrow V_0$.

[La réciproque est vraie, et immédiate.] $x \mapsto f(x)$

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f: \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ de classe C^n .

Si f est injective et $df(x)$ est bijective pour tout $x \in U$, alors la partie $V := f(U)$ de F est ouverte et l'application $\varphi: U \rightarrow V$ est un C^n -difféomorphisme.

$$x \mapsto f(x)$$

[La réciproque est vraie, et immédiate.]

Théorème (« théorème des fonctions implicites »)

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } E \times F}{\Omega} \longrightarrow G$ de classe C^n et $(a, b) \in \Omega$.

On suppose que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle $\underbrace{\partial_2}_{\text{par rapport à « la fonction implicite » } b} f(a, b)$ de f en (a, b) est bijective.

Alors il existe un ouvert de $E \times F$ de la forme $\underset{\text{ouvert de } E}{U} \times \underset{\text{ouvert de } F}{V}$ contenant (a, b) inclus dans Ω et une application $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^n , tels que pour tout $x \in U$ l'équation $f(x, y) = 0$ d'inconnue $y \in V$ a pour unique solution $\varphi(x)$.^(**)

De plus : $\varphi(a) = b$ et $\boxed{d\varphi(a) = -(\partial_2 f(a, b))^{-1} \circ \partial_1 f(a, b)}$.

se retrouve en pensant à « $0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$ »

(*) Afin d'étudier le rang de f en a lorsque a varie, il peut être utile d'utiliser le critère suivant : le rang d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ est l'ordre maximal des matrices carrées inversibles extraites de M .

(**) Géométriquement cela signifie que : si $(df(a, b))^{-1}(\{0\})$ est un graphe " $y =$ fonction (linéaire) de x " alors $f^{-1}(\{0\})$ est « localement » un graphe " $y =$ fonction (de classe C^n) de x ".