Université Paris Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2016/2017
U1TC35

VIII. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1) a) Montrer qu'une submersion C^∞ envoie un ouvert sur un ouvert.

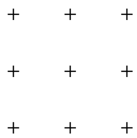
b) Montrer qu'une immersion C^∞ se restreint en un plongement C^∞ dans un certain voisinage de chaque point de son ensemble de définition.

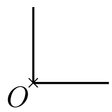
c) Montrer qu'une application $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ injective de classe C^∞ vérifiant $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\|\gamma(t)\| \underset{|t|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ est un plongement.

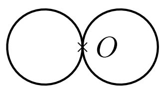
2) Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont-elles des sous-variétés C^∞ ?

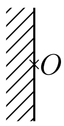
A : 

$x = y = 0$

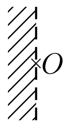
; B : 
$x, y \in \mathbb{Z}$

; C : 

; D : 

; E : 

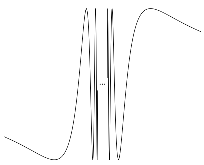
$x > 0$

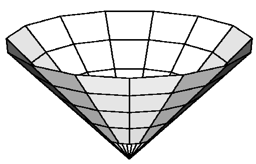
; F : 

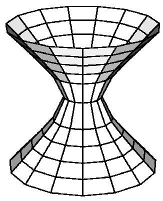
$x \geq 0$

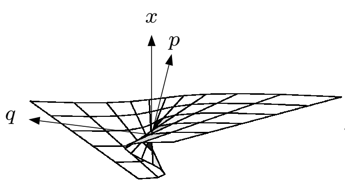
; G : 
$y^2 = x^3$

;

H : 
$x \neq 0$ et $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

; I : 
$x^2 + y^2 = z^2$ et $z \geq 0$

; J : 
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

; K : 

$x^3 + px + q = 0$

.

3) a) La projection d'une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$, sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^p$), est-elle toujours une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^p$?

b) La réunion de deux sous-variétés C^∞ de $\mathbb{R}^n$ est-elle toujours une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$? Cas de l'intersection ?

c) Le produit $X \times Y$ d'une sous-variété C^∞ X de dimension d de $\mathbb{R}^p$ par une sous-variété C^∞ Y de dimension e de $\mathbb{R}^q$ est-il toujours une sous-variété C^∞ de dimension $d+e$ de $\mathbb{R}^{p+q}$?

4) Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont-elles des sous-variétés C^∞ ?

– dans $\mathbb{R}^2$: $A \left| \begin{array}{l} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t) \end{array} \right.$, $0 < t < \pi$; $\quad B \left| \begin{array}{l} x(t) = t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t - t^2 \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

– dans $\mathbb{R}^3$: $C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1$; $D : (x + \frac{2}{5})^2 + y^2 = 1$; $E = C \cap D$;

$F : x^3 - z = 0$ et $y^3 - z^2 = 0$; $G : z = \sqrt[3]{x+y}$; $H : z = |x+y|^3$;

$I : \overrightarrow{OM} = \big(2 + t\,\cos(\frac{\theta}{2})\,\underbrace{\overrightarrow{u}_\theta\big) + t\,\sin(\frac{\theta}{2})\,\overrightarrow{k}}_{\text{coord. cylindriques}}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $-1 < t < 1$.

5) Déterminer, avec les notations de l'exercice précédent, les espaces tangents suivants :

$T_{\left(\frac{7}{4},0\right)}B$; $T_{\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},2\right)}E$; $T_{(1,1,1)}F$; $T_{(1,-1,0)}G$; $T_{(0,2,0)}I$.

6) a) Soient S une sous-variété C^∞ de dimension d de $\mathbb{R}^n$ et $a \in S$. On se donne une immersion $g\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ et $t_0 \in \Omega$, avec $g(t_0) = a$ et $g(\Omega) \subseteq S$.

Montrer que : $T_a S = \mathrm{Im}(\mathrm{d}g(t_0))$.

b) On considère l'application $p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,u) & \longmapsto & \gamma(t) + u\gamma'(t) \end{array}$ où $\gamma(t) := (t, t^2, t^3)$.

On suppose, par l'absurde, que son image Σ est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

Calculer $T_{p(0,\frac{1}{n})}\Sigma$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, puis $T_0\Sigma$ par passage à la limite.

En déduire une contradiction, en terme de graphe d'une application de $\underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^2}{U}$ dans $\mathbb{R}$, en constatant que les deux premières coordonnées de $p\left(0, \frac{1}{n}\right)$ et $p\left(\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sont égales.

7) a) Montrer que $SL(n,\mathbb{R}) := \{M \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$, et calculer $T_I SL(n,\mathbb{R})$.

b) Montrer que $SO(n,\mathbb{R}) := \{M \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \mid \underbrace{{}^tMM}_{\text{symétrique}} = I \text{ et } \det M = 1\}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$, et calculer $T_I SO(n,\mathbb{R})$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $S := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\|x\|}_{\text{norme euclidienne de } x} = \|y\| = 1 \text{ et } \underbrace{x \cdot y}_{\text{produit scalaire de } x \text{ et } y} = \lambda\right\}$.

Pour quelles valeurs de λ cette partie S de $\mathbb{R}^{2n}$ est-elle une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$?

8) a) Montrer que $\mathscr{C} := \left\{(X,Y) \in \mathbb{C}^2\setminus\{(0,0),(1,1)\} \mid Y^2 = X^3\right\}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{C}^2$.

Vérifier que l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{Y+1}{X-1} & \text{si } (X,Y)\neq(1,-1) \\ \text{ou} & \\ \frac{X^2+X+1}{Y-1} & \text{si } (X,Y)=(1,-1) \end{cases} \end{array}$ est de classe C^∞.

b) Montrer que l'application $g\colon \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ z & \longmapsto & (z^3, z^2) \end{array}$ est un plongement entre sous-variétés C^∞.

c) Montrer que l'application $h\colon \begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}_{\text{avec } \theta,\varphi \in \mathbb{R}} & \longmapsto & (2+\cos\varphi)\,\overrightarrow{u}_\theta + \sin\varphi\,\overrightarrow{k} \end{array}$ est un plongement entre sous-variétés C^∞.

coord. cylindriques

9) a) Montrer que la partie $C : x^5 + y^3 + z^7 = 0$ et $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection avec $S^2 : x^2+y^2+z^2 = 1$ est encore une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

b) Prouver que l'application $f\colon \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times (C \cap S^2) & \longrightarrow & C \\ (t,(x,y,z)) & \longmapsto & (t^{\frac{1}{5}}x, t^{\frac{1}{3}}y, t^{\frac{1}{7}}z) \end{array}$ est un difféomorphisme entre sous-variétés C^∞.

10) a) Montrer que l'application $V\colon S^2 \to \mathfrak{M}(3,\mathbb{R})$ qui à $u \in S^2$ associe la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale $p_{\mathbb{R}u}$ de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}u$ se prolonge en une immersion polynomiale $\widetilde{V}\colon \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathfrak{M}(3,\mathbb{R})$.

b) En déduire que $\mathbb{P}^2 := V(S^2)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathfrak{M}(3,\mathbb{R})$.

c) Pourquoi le ruban de Mœbius (cf. 4. I) est-il C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}^2\setminus\{V(0,0,1)\}$?