

Sous-variétés de \mathbb{R}^n : à retenir (J-Y D)

Définition

Soient $f, g: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$), et $a \in U$.

(a) On dit que f est *une submersion en a* si $df(a)$ est surjective (c'est-à-dire : $\text{rg } df(a) = q$).
On dit que f est *une submersion* si elle est une submersion en tout point de U .

(b) On dit que g est *une immersion en a* si $dg(a)$ est injective (c'est-à-dire : $\text{rg } dg(a) = p$).
On dit que g est *une immersion* si elle est une immersion en tout point de U .

On dit que g est *un plongement* si g est une immersion et $U \rightarrow g(U)$ est un homéomorphisme.
 $x \mapsto g(x)$

Théorème (« théorème du rang constant »)

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k ($p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$), $a \in U$ et $r \in \mathbb{N}$.

(a) On a : f est une submersion en a si et seulement si $p \geq q$ et il existe un C^k -difféomorphisme

$$\varphi: \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'} \text{ tel que : } f|_V: x = \underbrace{\varphi^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}} \in V \longmapsto y = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q.$$

L'ensemble des points de U où f est une submersion est un ouvert de \mathbb{R}^p .

(b) On a : f est une immersion en a si et seulement si $p \leq q$ et il existe un C^k -difféomorphisme

$$\psi: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'} \text{ tel que : } f(V) \subseteq W \text{ et } f|_V: x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \underbrace{\psi^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{du coté du} \\ \text{gros espace}}} \in \mathbb{R}^q.$$

L'ensemble des points de U où f est une immersion est un ouvert de \mathbb{R}^p .

(c) Le rang de f est égal à r au voisinage de a si et seulement si $p \geq r$ et $q \geq r$ et il existe des C^k -difféomorphismes $\varphi: \underset{\text{ouvert de } U \text{ contenant } a}{V} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{V'}$ et $\psi: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \text{ contenant } f(a)}{W} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q}{W'}$ tels que :

$$f(V) \subseteq W \quad \text{et} \quad \underbrace{f|_V: x = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ x'_{r+1} \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in V \longmapsto y = \psi^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q}_{\text{c'est-à-dire : } \forall x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in V' \quad \psi(f(\varphi^{-1}(x'))) = (x'_1, \dots, x'_r, 0, \dots, 0)}$$

Définition-Proposition

Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $d \in \mathbb{N}$.

(a) On dit que S est *une sous-variété de classe C^k et dimension d de \mathbb{R}^n* si pour tout $a \in S$, il existe un C^k -difféomorphisme $c: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a}{U} \longrightarrow \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U'}$ tel que $c(U \cap S) = c(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

Dans ce cas *l'espace vectoriel tangent à S en $a \in S$* est le sous-espace vectoriel suivant de \mathbb{R}^n :
 $T_a S \stackrel{\text{définition}}{=} \left\{ \gamma'(0) ; \gamma: \underset{\substack{\text{intervalle} \\ \text{ouvert contenant } 0}}{I} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^k, \gamma(I) \subseteq S \text{ et } \gamma(0) = a \right\} \stackrel{\text{proposition}}{=} (dc(a))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}).$

(b) Lorsque $S = f^{-1}(\{0\})$ avec $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ C^k et f submersion en tout point de S , on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de \mathbb{R}^n et $T_a S = (df(a))^{-1}(\{0\})$ pour $a \in S$.

(c) Lorsque $S = \text{Im } g$ avec $g: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ plongement C^k , on a :

S est une sous-variété C^k de dimension d de \mathbb{R}^n et $T_{g(t)} S = \text{Im } dg(t)$ pour $t \in \Omega$.

(d) On se donne une bijection $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et note :

$$\tilde{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lorsque $S = \tilde{\sigma}(\text{graphe}(h))$ avec $h: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ C^k , on a d'après (b) avec $g(t) = \tilde{\sigma}(t, h(t))$:

c'est-à-dire $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = h_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \dots \text{ et } x_{\sigma(n)} = h_{n-d}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})\}$
 S est une sous-variété C^k de dimension d de \mathbb{R}^n et $T_a S = \tilde{\sigma}(\text{graphe}(dh(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)})))$ pour $a \in S$.

c'est-à-dire $T_a S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma(d+1)} = dh_1(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)}) \cdot (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) \text{ et } \dots \text{ et } x_{\sigma(n)} = dh_{n-d}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d)}) \cdot (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})\}$

nécessaire localement (réalisera (b) et (c))

Remarques

- (a) Tout ouvert d'une sous-variété de classe C^k de \mathbb{R}^n est une sous-variété de classe C^k de \mathbb{R}^n .
 (b) Pour démontrer qu'une application est un plongement, on pourra utiliser le résultat suivant.

Si $g: \underbrace{\Omega}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}^d} \longrightarrow \underbrace{\Omega'}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n}$ est une application continue telle que

$$\underbrace{\forall K' \subseteq \Omega'}_{\text{compact}} \quad \underbrace{\exists K \subseteq \Omega}_{\text{compact}} \quad \forall x \in \Omega \quad (x \notin K \implies g(x) \notin K').$$

on traduit cela en notant : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty_{\Omega}} \infty_{\Omega'}$

alors, l'image par l'application g d'un fermé de Ω est un fermé de Ω' .

← [idée : $\Omega \cup \{\infty_{\Omega}\}$ est compact]

Définition-Proposition

Soient X, Y, Z des sous-variétés de classe C^k de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m, l \in \mathbb{N}$).

(a) On dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est de classe C^k si :

$$\forall a \in X \quad \exists \tilde{f}: \underbrace{U}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } a} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad C^k \quad f|_{U \cap X} = \tilde{f}|_{U \cap X}. \quad (*)$$

Dans ce cas, pour $a \in X$ l'application $T_a f: T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ est indépendante du choix de \tilde{f} .
 $v \mapsto df(a) \cdot v$

(b) Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont de classe C^k , alors $g \circ f: X \rightarrow Z$ est de classe C^k et pour tout $a \in X$ on a : $T_a(g \circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f$.

(c) On dit qu'une application $\varphi: X \rightarrow Y$ est un C^k -difféomorphisme si :

φ est une bijection, φ est de classe C^k , et φ^{-1} est de classe C^k .

Définition-Proposition

Soient $f, g: \underbrace{X}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^n} \longrightarrow \underbrace{Y}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^m}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

(a) Pour tout $a \in X$, on dit que f est une *submersion en a* si $T_a f$ est surjective.

On dit que f est une *submersion* si elle est une submersion en tout point de X .

Dans ce cas, pour chaque $b \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{b\})$ est une sous-variété de classe C^k de \mathbb{R}^n et on a $T_a(f^{-1}(\{b\})) = (T_a f)^{-1}(\{0\})$ pour $a \in f^{-1}(\{b\})$.

(b) Pour tout $a \in X$, on dit que g est une *immersion en a* si $T_a g$ est injective.

On dit que g est une *immersion* si elle est une immersion en tout point de X .

On dit que g est un *plongement* si g est une immersion et $X \rightarrow g(X)$ est un homéomorphisme.
 $x \mapsto g(x)$

Dans ce cas $\text{Im } g$ est une sous-variété C^k de \mathbb{R}^m et on a $T_{g(a)}(\text{Im } g) = \text{Im } T_a g$ pour $a \in X$.

Théorème (« théorème d'inversion locale »)

Soient $f: \underbrace{X}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^m}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$) et $a \in X$.

Il existe un ouvert X_0 de X contenant a et un ouvert Y_0 de Y contenant $f(a)$ tels que f se restreint en un C^k -difféomorphisme $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ si et seulement si $T_a f$ est bijective.
 $x \mapsto f(x)$

Théorème (« théorème d'inversion globale »)

Soit $f: \underbrace{X}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{Y}_{\text{sous-variété } C^k \text{ de } \mathbb{R}^m}$ de classe C^k ($k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}$ et $n, m \in \mathbb{N}$).

La partie $f(X)$ de Y est ouverte et l'application $X \rightarrow f(X)$ est un C^k -difféomorphisme si et
 $x \mapsto f(x)$

seulement si f est injective et $T_x f$ est bijective pour tout $x \in X$.

(*) Il en résulte immédiatement que si $f: X \rightarrow Y$ est de classe C^k et, X_0 et Y_0 sont des sous-variétés de classe C^k de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m telles que $X_0 \subseteq X$ et $Y_0 \subseteq Y$ avec $f(X_0) \subseteq Y_0$, alors $X_0 \rightarrow Y_0$ est de classe C^k .
 $x \mapsto f(x)$