Notion de base de filtre (J-Y D)

⟵ hors programme !!!

Définition

Soient X un ensemble, Y un espace topologique, $f\colon X\to Y$ et $l\in Y$.

(a) Une *base de filtre* sur X est un ensemble $\mathscr{B}$ de parties de X tel que :

(i) $\mathscr{B}\neq\emptyset$;

(ii) $\forall B\in\mathscr{B}\quad B\neq\emptyset$;

(iii) $\forall B_1,B_2\in\mathscr{B}\quad \exists B\in\mathscr{B}\quad B\subseteq B_1\cap B_2$.

(b) On dit que f tend vers l suivant une base de filtre $\mathscr{B}$ fixée sur X, et note $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$, si :

$$\forall V\in\mathcal{V}_Y(l)\ \ \exists B\in\mathscr{B}\ \ f(B)\subseteq V.^{(*)}$$

Remarque

On utilise les notations de la définition.

Lorsque Y est séparé, l'ensemble $\lim\limits_{\mathscr{B}} f$ contient au plus un point.

Proposition 1 (curiosité immédiate et sans intérêt pratique)

Soient X un espace topologique et $A\subseteq X$. On note i_A l'injection canonique de A dans X.

La partie $\overline{A}$ de X est la réunion des $\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$ où $\mathscr{B}$ décrit toutes les bases de filtre sur A.

Démonstration

($\subseteq$) Soit $a\in\overline{A}$. En choisissant $\mathscr{B}:=\{U\cap A\ ;\ U\in\mathcal{V}_X(a)\}$, on constate que $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$.

($\supseteq$) Soient $\mathscr{B}$ une base de filtre sur A et $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$. Tout voisinage V de a dans X contient un élément B de $\mathscr{B}$, donc au moins un élément de A (n'importe quel élément de B). D'où : $a\in\overline{A}$. □

Proposition 2 (curiosité immédiate et sans intérêt pratique)

Soient X et Y des espaces topologiques, $a\in X$ et $l\in Y$, $A\subseteq X$ tel que $a\in\overline{A}$.

(a) Une application $f\colon A\to Y$ a pour limite l quand $x\to a$ avec $x\in A$ si et seulement si pour toute base de filtre $\mathscr{B}$ sur A telle que $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$, on a $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$.

(b) Une application $f\colon X\to Y$ est continue en a si et seulement si pour toute base de filtre $\mathscr{B}$ sur X telle que $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} \mathrm{id}_X$, on a $f(a)\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$.

Démonstration

(a) ($\Rightarrow$) On suppose que $f(x)\underset{x\to a,\ x\in A}{\longrightarrow} l$ et fixe une base de filtre $\mathscr{B}$ sur A telle que $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$.
Soit $V\in\mathcal{V}_Y(l)$. Comme $f(x)\underset{x\to a,\ x\in A}{\longrightarrow} l$: il existe $U\in\mathcal{V}_X(a)$ tel que $f(U\cap A)\subseteq V$.
Comme $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$: il existe $B\in\mathscr{B}$ tel que $B\subseteq U\cap A$. On en déduit que $f(B)\subseteq V$.

Par conséquent : $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour toute base de filtre $\mathscr{B}$ sur A telle que $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$, on a $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$.

Soit $V\in\mathcal{V}_Y(l)$. La base de filtre $\mathscr{B}:=\{U\cap A\ ;\ U\in\mathcal{V}_X(a)\}$ sur A vérifie : $a\in\lim\limits_{\mathscr{B}} i_A$.

Par hypothèse : $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f$. Donc il existe $U\in\mathcal{V}_X(a)$ tel que $f(U\cap A)\subseteq V$. D'où le résultat.

(b) Il s'agit d'un cas particulier du (a). □

($*$) On peut démontrer (utiliser $\widetilde{X}=X\cup\{\omega\}$ où $\omega\notin X$) que : les bases de filtre sur X sont exactement les ensembles de la forme $\mathscr{B}=\{W\cap X\ ;\ W\in\mathscr{W}\}$ où $\widetilde{X}$ est un ensemble contenant X muni d'une structure d'espace topologique, ω est un point de l'adhérence de X dans $\widetilde{X}$, et $\mathscr{W}$ est un ensemble de voisinages de ω dans $\widetilde{X}$ tel que tout voisinage de ω dans $\widetilde{X}$ contient un élément de $\mathscr{W}$. Ainsi : $l\in\lim\limits_{\mathscr{B}} f \iff f(x)\underset{x\to\omega,\ x\in X}{\longrightarrow} l$.