Réduction des formes quadratiques (J-Y D)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $\Phi = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de φ dans $\mathscr{B}$.

On note $q(v) = \varphi(v, v)$ pour $v \in E$.

Proposition

Soient $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de E et $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$.

Les conditions suivantes (i), (ii), et (iii) sont équivalentes :

(i) la matrice $\Phi' = (\varphi(e'_i, e'_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$;

(ii) ${}^tP\Phi P = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ où $P = \begin{array}{c c} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & \cdots & \boxed{} \end{pmatrix} & \begin{matrix} /e_1 \\ \vdots \\ /e_n \end{matrix} \end{array}$;

(iii) $q(v) = d_1 {x'_1}^2 + \cdots + d_n {x'_n}^2$ quand $\underset{/\mathscr{B}'}{v} \left| \begin{matrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{matrix} \right. \in E$.

Remarques

(a) Il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$ réalisant la condition (ii) précédente : il suffit de diagonaliser Φ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\Phi = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec Q orthogonale, puis de poser $P = Q$, $d_1 = \lambda_1$ et ... et $d_n = \lambda_n$. Quitte à multiplier chacun des vecteur de $\mathscr{B}'$ par un scalaire non-nul, on peut ensuite modifier $\mathscr{B}'$ pour obtenir : $d_1, .., d_n \in \{-1, 0, 1\}$.

(b) Au lieu de chercher à diagonaliser Φ pour réaliser la condition (ii), il sera bien plus facile d'appliquer la méthode de décomposition de Gauss ci-dessous pour réaliser la condition (iii).

Évidemment, elle ne fournira ni une base diagonalisant Φ, ni les valeurs propres de Φ.

Théorème (« théorème d'inertie de Sylvester »)

On note $s := \max\limits_{\substack{F \text{ sous-ev de } E \\ q_{|F} \text{ déf } \geq 0}} \dim F$ et $t := \max\limits_{\substack{G \text{ sous-ev de } E \\ q_{|G} \text{ déf } \leq 0}} \dim G$.

On appelle « signature de φ » le couple $\mathrm{sg}(\varphi) := (s, t)$ et « rang de φ » le nombre $\mathrm{rg}(\varphi) := s + t$.

Avec les notations de la proposition, on a : s est le nombre d'indices i tels que $d_i > 0$ et t est le nombre d'indices i tels que $d_i < 0$. En particulier, le rang de la matrice Φ est égal à $\mathrm{rg}(\varphi)$.

Algorithme (« méthode de décomposition de Gauss »)

On a : $q(v) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}\, x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}\, x_i x_j$ pour $\underset{/\mathscr{B}}{v} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right. \in E$, où $\Phi = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Voici la première étape de l'algorithme en notant « c. l. » pour « combinaison linéaire » :

– si $a_{i,i} \neq 0$: $q(v) = a_{i,i}\big(x_i + \text{c. l.(autres coord. que } x_i)\big)^2 + \underbrace{\cdots}_{\text{pas de } x_i}$;

– si $a_{1,1} = \cdots = a_{n,n} = 0$ et $a_{i,j} \neq 0$:

$$q(v) = \tfrac{1}{2} a_{i,j} \times \underbrace{4\left(x_i + \text{c. l.(autres coord. que } x_i, x_j)\right)\left(x_j + \text{(autres coord. que } x_i, x_j)\right)}_{\text{s'écrit } 4\,\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2} + \underbrace{\cdots}_{\text{pas de } x_i,\, x_j}.$$

On recommence ensuite avec l'expression mise dans coté. Cette méthode fournit une décomposition de la forme $q(v) = d_1 {x'_1}^2 + \cdots + d_r {x'_r}^2$ où $x'_1, ..., x'_r$ s'interprètent comme les r premières coordonnées de v dans une certaine base $\mathscr{B}'$ de E. Elle permet de calculer la signature de φ.