

CC2

Exercice 1. Justifier que l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 3y > 5xy - y^3\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
(indication : poser $f(x, y) = x^2 - 3y - 5xy + y^3$)

Exercice 2. Soit $I : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie pour $z \in \mathbb{C}^*$ par $I(z) = \frac{z}{|z|^2}$,

1. Démontrer que I est un homéomorphisme.
2. Démontrer que les deux ensembles suivants sont homéomorphes :

$$A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\} \text{ et } B = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par

$$f(x, y) = \frac{y^3 x}{y^6 + 2x^2}$$

On remarque que cette fonction est bien définie et continue.

1. Démontrer que la restriction de f à n'importe quelle droite passant par l'origine admet une limite en $(0, 0)$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?