Contrôle Continu 3 (20/10/2016)

Durée : 30 minutes.
***Toutes** les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1. (**5,5 PTS**) On munit l'espace $]0,1]$ de la distance

$$\forall (x,y) \in]0,1]^2, \quad \delta(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

On admet ici qu'il s'agit bien d'une distance.

a) **(1,5 points)** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance δ si, et seulement si, la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance usuelle.

b) **(1,5 points)** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in]0,1]$ pour la distance δ, alors la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ pour la distance usuelle.

c) **(1,5 points)** Montrer que l'espace $]0,1]$ munit de la distance δ est complet.

d) **(1 point)** L'espace $]0,1]$ est-il complet pour la distance usuelle ?

Exercice 2. (**4,5 PTS**)

a) **(1 point)** Citer le théorème du point fixe de Banach.

b) **(3,5 points)** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x \left(e^{-1-t^2} f(t) + \varphi(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra considérer l'application suivante

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty) & \longrightarrow & (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty) \\ f & \longmapsto & T(f), \end{array} \right.$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_0^x \left(e^{-1-t^2} f(t) + \varphi(t) \right) dt$$

et

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On rappelle que l'espace $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace complet.