Université Paris-Diderot
Topologie Calcul différentiel, L3

Année 2016-2017

Contrôle continu 4

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\sup_{x\in S} \|A.x\| < +\infty$. Cette borne est-elle atteinte ?

(b) On pose $|||A||| = \sup_{x\in S} \|A.x\|$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|A.x\| \leq |||A||| \, \|x\| \ .$$

(c) On choisit $\|x\| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Montrer que

$$|||A||| = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \ .$$

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\left\| \sum_{k\geq 0} a_k X^k \right\| = \sum_{k\geq 0} k! \, |a_k|$. L'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est-elle continue ? Si oui, calculer sa norme.

Exercice 3 (Bonus)**.** Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit E l'espace normé défini comme $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & f.g \end{array}$$

est continue et calculer sa norme.