Université Paris Diderot

Mathématiques, Topologie et calcul diff

CC5 – 01/12 2016 – 14h-14h45

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Pourquoi ?

b) Montrer que f est différentiable en $(1,1)$ et calculer la différentielle $Df(1,1)$.

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} + 1 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On admet que g est différentiable en $(1,1)$ et que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 1$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 0$.

a) Calculer $D(fg)(1,1)$.

b) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $h(x,y) = (g(x,y), x^2 + xy)$. Calculer $Dh(1,1)$.

Exercice 3. Soit $E = M(2 \times 2, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels, muni d'une norme matricielle vérifiant $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. Soit $f : E \to E$ la fonction $A \mapsto A^2$. Montrer que f est différentiable en chaque $A \in E$ et calculer $Df(A)$.

(Toutes les réponses doiventêtre justifiées.)