Calcul du rang d'une matrice (J-Y D)

On considère un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues réelles :

$$(E) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p &= b_1 \\ \quad ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p &= b_n \end{cases} \qquad \text{d'inconnue } (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$$

où sont donnés $a_{11},..., a_{1p}, a_{21},..., a_{2p}, \dots, a_{n1},..., a_{np} \in \mathbb{R}$ et $b_1,..., b_n \in \mathbb{R}$.

Notations

On introduit : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ ... \ a_{1p} \\ ... \\ a_{n1} \ ... \ a_{np} \end{pmatrix}$ *matrice de* (E), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *inconnue de* (E) et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

La *matrice augmentée* de (E) est la matrice $(A|B) \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \ ... \ a_{1p} & b_1 \\ ... & \vdots \\ a_{n1} \ ... \ a_{np} & b_n \end{array}\right)$, où la barre verticale n'a aucune signification mathématique.

On va résoudre $(E) : AX = B$ en travaillant sur les lignes de $(A|B)$ et sur les colonnes de A.

Définition

Dans ce qui suit on va noter L_1, ..., L_n les lignes de A et C_1, ..., C_p les colonnes de A. On désignera par L'_1, ..., L'_n les nouvelles lignes après transformation.

Une *opération élémentaire sur les lignes de* A est une des transformations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$, $L'_i = c\,L_i$ avec $c \neq 0$, $L'_i = L_i + cL_j$ avec $i \neq j$ et $c \in \mathbb{R}$.

Un *échange de deux colonnes* de A est une transformation $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$.

Proposition 1 (« méthode de Gauss »)

a) On peut passer par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et d'échanges de deux colonnes, de la matrice A à une matrice de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & d_r & & & \\ \hline 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec } d_1 \neq 0, \ ..., \ d_r \neq 0.$$

b) Le système $(E) : AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ équivaut au système $(E') : A'X' = B'$ d'inconnue $X' \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_p} \end{pmatrix}$, où les transformations du (a) envoient $(\overset{x_1 \dots x_p}{A} \,|\, B)$ sur $(\overset{x_{j_1} \dots x_{j_p}}{A'} \,|\, B')$.

[Noter que les lettres qui se trouvent au-dessus de A ou de A' représentent ici les noms des variables-coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et non pas les valeurs particulières qu'elles prennent pour le vecteur X. Ce sont les éventuels échanges de colonnes qui feront passer de $x_1, ..., x_p$ à $x_{j_1}, ..., x_{j_p}$.]

c) On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$.

On a : $\quad \mathscr{S}_E \neq \emptyset \iff \underbrace{b'_{r+1} = \cdots = b'_n = 0}_{n-r \text{ conditions}}$.

Dans ce cas, on obtient une équation paramétrique de $\mathscr{S}_E$ à partir de (E') en écrivant successivement x_{j_r}, ..., x_{j_1} en fonction des paramètres $\underbrace{t_1 \overset{\text{déf}}{=} x_{j_{r+1}}, ..., t_{p-r} \overset{\text{déf}}{=} x_{j_p}}_{p-r \text{ paramètres}}$.

Ainsi, quand $r = n = p$ (« système de Cramer ») le système (E) a une unique solution.

Remarque

L'algorithme usuel consiste à travailler successivement sur les colonnes C_k, k variant de 1 à p.

Après un éventuel échange de C_k avec une colonne à droite de C_k (quand le terme diagonal de C_k et ses termes sous la diagonale sont nuls) et un éventuel échange de la ligne L_k avec une ligne sous L_k, on obtient un terme diagonal de C_k non-nul. Ensuite on obtient des 0 sous la diagonale dans C_k par ajout d'un multiple adéquat de L_k à chacune des lignes sous L_k.

Proposition 2 (avec la méthode de Gauss)

On transforme $\overset{x_1 \dots x_p}{A} = \begin{array}{c} x_1 \ \dots \ x_p \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$ en $\overset{x_{j_1} \dots x_{j_p}}{A'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|ccc} x_{j_1} & \dots & & x_{j_r} & x_{j_{r+1}} & \dots & x_{j_p} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & & & * & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & d_r & * & \dots & * \\ \hline 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array}$

par la méthode de Gauss, avec $d_1 \neq 0$, ..., $d_r \neq 0$.

On note $v_1, .., v_p \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs colonnes de la matrice A.
On a : $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$, donc $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p) = r$.

DÉMONSTRATION

On vérifie d'abord que la famille $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ est libre. On montre pour cela que l'équation $(\star)$ $\alpha_1 v_{j_1} + ... + \alpha_r v_{j_r} = 0$ d'inconnue $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ a pour seule solution $(0, ..., 0)$.

On a : $(\star) \iff \alpha_1 v_{j_1} + ... + \alpha_r v_{j_r} + 0 v_{j_{r+1}} + ... + 0 v_{j_p} = 0 \iff A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

En revenant à un système linéaire, on constate que l'équation $(\star)$ a pour seule solution $(0, ..., 0)$.

On vérifie maintenant que $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ engendre $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$. Soit $k \in \{r+1, ..., p\}$. On montre que l'équation $(\star\star)$ $\alpha_1 v_{j_1} + ... + \alpha_r v_{j_r} = v_{j_k}$ d'inconnue $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ a au moins une solution. Le résultat en découlera car on aura ensuite $\underbrace{\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)}_{\text{plus petit sous-ev de } E \text{ contenant } v_1, \, ..., \, v_p} \subseteq \mathrm{Vect}(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$.

On a : $(\star\star) \iff \alpha_1 v_{j_1} + ... + \alpha_r v_{j_r} + 0 v_{j_{r+1}} + ... + (-1) v_{j_k} + ... + 0 v_{j_p} = 0 \iff A' \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{ligne } k \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \!\!\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Une remontée triangulaire fournira une solution de $(\star\star)$. □

Proposition 3 (sans la méthode de Gauss)

Le rang de A est l'ordre maximal des matrices carrées inversibles extraites de A en rayant certaines lignes et certaines colonnes.

DÉMONSTRATION

On sait que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.$^{(\star)}$

Soit $\widetilde{A}$ une matrice carrée inversible d'ordre m extraite de A en rayant les lignes autres que L_{i_1}, ..., L_{i_m} et les colonnes autres que C_{j_1}, ..., C_{j_m}. Le rang de A est supérieur ou égal au rang de la matrice A_1 obtenue à partir de A en rayant les colonnes autres que C_{j_1}, ..., C_{j_m}. Et le rang de ${}^tA_1$ est supérieur ou égal au rang de la matrice A_2 obtenue à partir de ${}^tA_1$ en rayant les colonnes autres que C_{i_1}, ...,C_{i_m}. Par ailleurs $\widetilde{A}$ est égale à la transposée de A_2. Donc $m = \mathrm{rg}\,(\widetilde{A}) \leq \mathrm{rg}\,(A)$.

On note $v_1, .., v_p \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Il existe une base $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ de $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ extraite de $(v_1, .., v_p)$. On a : $\mathrm{rg}\,(A) = r = \mathrm{rg}\,(A_1)$ où A_1 est la matrice déduite de A en rayant les colonnes autres que C_{j_1}, ..., C_{j_r}. De même, on a : $\mathrm{rg}\,({}^tA_1) = \mathrm{rg}\,(A_2)$ où A_2 est la matrice déduite de A_1 en rayant certaines colonnes bien choisies, autres que des colonnes de numéros i_1, ..., i_r. Par conséquent la transposée $\widetilde{A}$ de A_2, extraite de A en rayant les lignes L_{i_1}, ..., L_{i_r} et les colonnes autres que C_{j_1}, ..., C_{j_r} est de rang r, en particulier inversible. □

$(\star)$ Soit $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose : $f(X) = MX \in \mathbb{R}^n$ pour $X \in \mathbb{R}^p$. On fixe une base $(u_1, ..., u_r)$ de $\mathrm{Im}\, f$. On la complète en une base $(u_1, ..., u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et note $(u_1^*, ..., u_n^*)$ la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ telle que $u_i^*(u_j) = \delta_{i,j}$.
Pour $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^* \in (\mathbb{R}^n)^*$, on a : $\alpha \in \mathrm{Ker}({}^tf) \iff \alpha(\mathrm{Im}\, f) = \{0\} \iff \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}({}^tf)$ a pour base $(u_{r+1}^*, ..., u_n^*)$. D'où : $\mathrm{rg}\,({}^tM) = \mathrm{rg}\,({}^tf) = n - \dim \mathrm{Ker}({}^tf) = \mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(M)$.