Théorème de Schwarz (J-Y D)

Dans ce complément, je recopie une version du théorème de Schwarz et sa démonstration (modifiée en suivant une idée de la démonstration de Xavier Blanc écrite dans son polycopié en 2014).

Référence : paragraphe 1 de la section 8.2.3 du volume 3 du *Cours de mathématiques* de E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux [51 L RAM].

Proposition (« théorème de Schwarz »)

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

On considère une application différentiable $f \colon \underset{\text{ouvert de } E}{U} \longrightarrow F$ et $a \in U$.

On suppose que $\mathrm{d}^2 f(a)$ est définie. Pour tous $h, k \in E$, on a :

$$(\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h) \cdot k = (\mathrm{d}^2 f(a) \cdot k) \cdot h.$$

DÉMONSTRATION

On se donne $h, k \in E$.

Par définition de la différentielle, on a : $\frac{\mathrm{d}f(a+u) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a) \cdot u}{\|u\|} \underset{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}}{\longrightarrow} 0.$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subseteq U$ et :

$$\|\mathrm{d}f(a+u) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a) \cdot u\| < \epsilon \|u\| \quad \text{dès que } u \in E \text{ vérifie } 0 < \|u\| < \alpha.$$

On va démontrer que : $(\star) \quad \|(\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h) \cdot k - (\mathrm{d}^2 f(a) \cdot k) \cdot h\| \leq 4\,\varepsilon (\|h\| + \|k\|)^2.$

En faisant ensuite tendre ε vers 0^+, on en déduira le résultat.

On peut supposer que $h \neq 0$ et $k \neq 0$. Quitte à remplacer (h, k) par $(\frac{\alpha}{4} \frac{h}{\|h\|}, \frac{\alpha}{4} \frac{k}{\|k\|})$, pour démontrer l'inégalité $(\star)$ on peut même supposer – et on suppose – que : $0 < \|h\| < \frac{\alpha}{2}$ et $0 < \|k\| < \frac{\alpha}{2}$.

On introduit : $D(h, k) := f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a)$.

Compte tenu de l'inégalité triangulaire, l'inégalité $(\star)$ découlera de l'inégalité suivante (qu'on appliquerait telle qu'elle puis en échangeant les rôles de h et de k), qu'il reste à démontrer :

$$(\star\star) \quad \|D(h, k) - (\mathrm{d}^2 f(a) \cdot k) \cdot h\| \leq 2\,\varepsilon (\|h\| + \|k\|)\,\|h\|.$$

On pose $\varphi(x) := f(x+k) - f(x) - (\mathrm{d}^2 f(a) \cdot k) \cdot x$ pour $x \in B(a, \frac{\alpha}{2})$.

On applique l'inégalité des accroissements finis à φ entre a et $a+h$:

$$\|D(h, k) - (\mathrm{d}^2 f(a) \cdot k) \cdot h\| = \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\mathrm{d}\varphi(a+th)\|\,\|h\|$$

où pour chaque $t \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{d}\varphi(a+th)\| &= \|\mathrm{d}f(a+th+k) - \mathrm{d}f(a+th) - \mathrm{d}^2 f(a) \cdot k\| \\
&\leq \|\mathrm{d}f(a+th+k) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a) \cdot (th+k)\| + \|\mathrm{d}f(a+th) - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a) \cdot (th)\| \\
&\leq \varepsilon \|th+k\| + \varepsilon \|th\| \leq 2\,\varepsilon (\|h\| + \|k\|).
\end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir l"inégalité $(\star\star)$. $\square$