Suites de fonctions différentiables (J-Y D)

Voici un résultat qui généralise le théorème « convergence uniforme et dérivabilité » de L2. On fixe des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés E et F de dimension finie (par exemple $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$).

Proposition (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n \colon \underset{\text{ouvert convexe de } E}{U} \longrightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, des applications vérifiant :

(i) il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge ;
(ii) les applications f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont différentiables ;
(iii) la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{d}f(x)\cdot h = \big(\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(x)\big)\cdot h = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in U$ et $h \in E$.

Démonstration

On se donne une partie bornée B de U. On va d'abord démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur B. Comme F est complet, l'ensemble F^B des applications de B dans F est complet pour la distance d_u de la convergence uniforme. Il suffit donc de vérifier que $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. Pour cela on relie les valeurs prises par f_n avec $f_n(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in B$ et $p > q$ dans $\mathbb{N}$, on a :
$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| + \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\|$
puis d'après l'inégalité des accroissements finis et par convexité de U :
$\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty \|x - x_0\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty K$ où $K := \sup_{b\in B}\|b\| + \|x_0\|$.
On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ et $\|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $p > q \geq Q$.
Ainsi : $\sup_{x\in B}\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon K}{2(K+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dès que $p > q \geq Q$.
Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de U.

Pour tout $x \in U$, on note : $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cf. le cas où $B = \{x\}$) et $g(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(x)$.
Il reste à démontrer que f est différentiable en tout $a \in U$ et $\mathrm{d}f(a) = g(a) = (h \mapsto \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(a)\cdot h))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $h \in E \setminus \{0\}$ tel que $a + h \in U$ et $q \in \mathbb{N}$, on a :
$\frac{\|f(a+h)-f(a)-g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\lim_{p\to+\infty}((f_p-f_q)(a+h)-(f_p-f_q)(a))\|}{\|h\|} + \frac{\|f_q(a+h)-f_q(a)-\mathrm{d}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \frac{\|(\mathrm{d}f_q(a)-g(a))\cdot h\|}{\|h\|}$.
Or l'inégalité des accroissements finis donne : $\|(f_p - f_q)(a+h) - (f_p - f_q)(a)\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty \|h\|$.
Il en résulte que : $(\star)$ $\frac{\|f(a+h)-f(a)-g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \|g - \mathrm{d}f_q\|_\infty + \frac{\|f_q(a+h)-f_q(a)-\mathrm{d}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \|\mathrm{d}f_q - g\|_\infty$.
On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|g - \mathrm{d}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $q \geq Q$.
On prend maintenant $q = Q$ et choisit $\alpha > 0$ tel que : $\frac{\big\|f_Q(a+h)-f_Q(a)-\mathrm{d}f_Q(a)\cdot h\big\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $\|h\| < \alpha$.
Ainsi, on obtient à partir de l'inégalité $(\star)$: $\frac{\|f(a+h)-f(a)-g(a)\cdot h\|}{\|h\|} < \varepsilon$ dès que $\|h\| < \alpha$.
On en conclut que f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = g(a)$.

Pour terminer, on remarque que l'application linéaire $l \mapsto l(h)$ de $\mathscr{L}(E, F)$ dans F est continue.
D'où : $\mathrm{d}f(a)\cdot h = g(a)\cdot h = \big(\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(a)\big)(h) = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(a)(h))$ pour tout $h \in E$. □