Distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$

1. Définition. On note :

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ puis $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$ pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$;
- $\mathscr{E}(\Omega)$ l'espace de Fréchet $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ pour les semi-normes $f \mapsto \sup\limits_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$ avec $\underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$;
- $\mathscr{C}_c(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{C}(\Omega) \mid \operatorname{Supp} \varphi \text{ compact}\}$ et $\mathscr{C}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{C}(\Omega) \mid \operatorname{Supp} f \subseteq K\}$ ($\underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega$ fixé) ;
- $\mathscr{D}_K(\Omega)$ le fermé $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap \mathscr{C}_K(\Omega)$ de $\mathscr{E}(\Omega)$ muni de la topologie induite ($\underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega$ fixé) ;
- $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{Supp} \varphi \text{ compact}\}$ muni de la famille formée des semi-normes dont les restrictions à tous les sous-espaces vectoriels $\mathscr{D}_K(\Omega)$, $\underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega$, sont continues.

On notera aussi $\mathscr{E}'(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)'$ et $\mathscr{D}'(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)'$ (formes linéaires continues sur $\mathscr{E}(\Omega)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$).

2. a) Proposition. L'espace vectoriel $\mathscr{D}'(\Omega)$ des *distributions sur* Ω est caractérisé par :

$$\mathscr{D}'(\Omega) = \Big\{T \in \mathscr{D}(\Omega)^* \;\Big|\; \forall \underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists M \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \quad |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty\Big\}.$$

On dit qu'une distribution T comme ci-dessus est *d'ordre fini* quand on peut choisir N indépendant de K ; le plus petit entier N indépendant de K qui convienne est alors appelé *ordre* de la distribution T.

b) Déf. Prop. L'espace $\mathcal{M}(\Omega)$ des *mesures de Radon sur* Ω est défini par :

$$\mathcal{M}(\Omega) = \Big\{\mu \in \mathscr{C}_c(\Omega)^* \;\Big|\; \forall \underset{\text{compact}}{K} \subseteq \Omega \quad \exists M \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{C}_K(\Omega) \quad |\mu(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_\infty\Big\}.$$

Toute mesure positive μ_0 sur la tribu borélienne de Ω qui est finie sur les compacts, fournit la mesure de Radon $\mu : \varphi \in \mathscr{C}_c(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_0(x)$ à laquelle on l'identifiera.
Quand $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_c(\Omega)$, on se permettra aussi d'écrire $\int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ à la place de $\mu(\varphi)$.

c) Proposition. Les applications linéaires canoniques suivantes sont injectives :

$$\begin{array}{ccc} L^{1_{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto & \left(T_f : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(t)\, f(x)\,\mathrm{d}x\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ \mu & \longmapsto & \left(\mu_{|\mathscr{D}(\Omega)} : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \end{array}.$$

Exemple : la « mesure de Dirac » en $a \in \mathbb{R}^m$ est la distribution $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$ sur $\mathbb{R}^m$.

On identifiera donc $L^{1_{loc}}(\Omega)$ et $\mathcal{M}(\Omega)$ à des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{D}'(\Omega)$, avec $L^{1_{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$.
[La mesure de Radon associée à f est $\varphi \in \mathscr{C}_c(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x)\mathrm{d}x$. L'image de $\mathcal{M}(\Omega)$ est formée des distributions d'ordre 0 sur Ω.]

3. a) Proposition. Pour tout compact K de Ω, il existe $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que : $\chi_{|K} = 1$ et $0 \leq \chi \leq 1$.

b) Déf. Prop. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pour tout $\underset{\text{ouvert}}{U} \subseteq \Omega$, on définit abusivement $T_{|U} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle T_{|U}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \qquad \text{pour } \varphi \in \mathscr{D}(U),$$

où on a identifié φ à son prolongement par 0 hors de U (terme de droite de l'égalité).

Le *support de* T, noté $\operatorname{Supp} T$, est le complémentaire du plus grand ouvert U de Ω tel que $T_{|U} = 0$.

c) Déf. Prop. L'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}'(\Omega) & \longrightarrow & \{T \in \mathscr{D}'(\Omega) \mid \operatorname{Supp} T \text{ compact}\} \\ S & \longmapsto & S_{|\mathscr{D}(\Omega)} \end{array}$ est bijective.

4. a) Déf. Prop. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$. On définit $fT, D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \qquad \text{pour } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Exemple : la « fonction de Heaviside » $H \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $H' = \delta_0$.

Cela prolonge le produit de f sur les éléments de $L^{1_{loc}}(\Omega)$ et l'action de D^α sur $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

b) Proposition. Soient $-\infty \leq a < x_1 < \cdots < x_n < b \leq +\infty$ et une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ tels que $f_{|]a,x_1[}$, $f_{|]x_1,x_2[}$, ..., $f_{|]x_n,b[}$ ont des prolongements de classe C^1 à $]a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_n, b[$.

On a : $\quad (T_f)' = T_{f'} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f(x_k^+) - f(x_k^-)\right) \delta_{x_k} \quad$ dans $\mathscr{D}'(]a, b[)$ « formule des sauts ».

c) Proposition. Toute distribution $S \in \mathscr{D}'(]a, b[)$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, a une primitive dans $\mathscr{D}'(]a, b[)$, et deux d'entre elles diffèrent d'une constante.