I. Exercices de révision

Suites de fonctions

1) Soit $\alpha \geq 0$. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ de fonctions sur $[0,1]$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha g_n(x) \quad \text{où} \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1-\frac{2}{n}]\ ; \\ x - 1 + \frac{2}{n} & \text{si} \quad x \in]1-\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}]\ ; \\ 1 - x & \text{si} \quad x \in]1-\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[0,1]$.

b) Montrer que $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément sur $[0,a]$ pour $0 < a < 1$.

c) Pour quelles valeurs de α y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

d) Étudier la limite de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$ en fonction de α.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions P_n et Q_n sont polynomiales.

b) Montrer que, pour tout $\delta \in\ ]0,1]$, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 1 sur $[\delta, 1]$, et vers -1 sur $[-1, -\delta]$.
Indication : utiliser l'inégalité $\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $(Q_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Séries de fonctions

3) a) On pose : $u_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\ ]0, +\infty[$.
Étudier la convergence (simple, uniforme, normale) de la série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$.

b) Même question pour la série $(\sum v_n)_{n\geq 0}$ avec $v_n(x) = a^n \sin(nx)$, $-1 < a < 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

c) Même question pour la série $(\sum w_n)_{n\geq 0}$ avec $w_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Tore de dimension 1

4) On note $(\mathbb{T}, +)$ le groupe quotient du groupe $(\mathbb{R}, +)$ par son sous-groupe $\mathbb{Z}^{(*)}$.

a) Montrer que $c\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to S^1 \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} \end{array}$ induit un isomorphisme de groupes $\tilde{c}\colon \begin{array}{l} \mathbb{T} \to S^1 \\ \dot{x} \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} \end{array}$.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application c se restreint en un homéomorphisme c_0 de $\left]x_0 - \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}\right[$ sur un ouvert U_0 de S^1.

c) Démontrer que l'application $f \mapsto f \circ c$ de $\mathscr{C}(S^1)$ dans l'ensemble, noté $\underbrace{\mathscr{C}_{\text{1-périodique}}(\mathbb{R})}_{\text{noté par abus } \mathscr{C}(\mathbb{T})}$, des applications continues et de période 1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est bijective.

$(*)$ On pose $\dot{x} := \{x + n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ quand $x \in \mathbb{R}$ (« classe de x » notée aussi $x + \mathbb{Z}$).
L'ensemble $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{\dot{x}\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition d'éléments quelconques $s, t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, définie par
$$s + t := \dot{\widehat{x + y}} \quad \text{indépendamment du choix d'éléments } x, y \text{ de } \mathbb{R} \text{ tels que } s = \dot{x} \text{ et } t = \dot{y}$$
est un groupe, appelé *groupe quotient du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *par son sous-groupe* $\mathbb{Z}$.

Dual topologique

On appellera « espace vectoriel topologique » sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle $\begin{array}{rcl} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ *et* $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\, x \end{array}$ *sont continues.*

Dans ce cas, on note E' l'espace vectoriel formé des formes linéaires continues sur E.

5) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose que E est inclus dans F (mais la topologie de E peut ne pas être la topologie induite), E est dense dans F, et l'injection canonique $i\colon E\to F$ est continue.

Montrer que la transposée $i'\colon \begin{array}{rcl} F' & \to & E' \\ l & \mapsto & l\circ i \end{array}$ de i est injective. (*)

Familles sommables

On dit qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est « sommable » si elle est intégrable pour la $\underbrace{\text{mesure de comptage}}_{\text{appelée aussi mesure de dénombrement}}$ μ sur I ; dans ce cas, on note : $\boxed{\sum_{i\in I} a(i) = \int_I a(i)\,\mathrm{d}\mu(i)}$. (**)

(La définition est différente quand on remplace $\mathbb{C}$ par un espace de Banach de dimension infinie.)

6) a) On pose : $u_n=1$ et $u_{-n}=-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, et $u_0=0$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} u_k$. Peut-on écrire que : « $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} u_n = 0$ » ?

b) Pour $p,q\in\mathbb{N}$, on pose : $v_{p,q}=1$ si $q=p$, $v_{p,q}=-1$ si $q=p+1$, et $v_{p,q}=0$ sinon.

Calculer $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} v_{p,q}\Big)$ et $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} v_{p,q}\Big)$. Pourquoi le th. de Fubini ne s'applique pas ?

7) Soit $x\in\,]-1,1[$.

Démontrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^{2p}}$.

(*) On peut montrer, mais c'est plus difficile, que $i'(F')$ est formé des $f\colon E\to\mathbb{K}$ linéaires qui sont continus pour la topologie de F (voir l'exercice 19 du chapitre 1 du livre « Analyse fonctionnelle » de Rudin, avec $Y=\mathbb{C}$).

(**) En particulier :

– si $I=\mathbb{N}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|<+\infty$; $\underbrace{\text{dans ce cas}}_{\textbf{ou par déf. quand } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\geq 0}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$;

– si $I=\mathbb{Z}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|<+\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{-n}|<+\infty$;

$\underbrace{\text{dans ce cas}}_{\textbf{ou par déf. quand } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\geq 0}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ (le membre de droite de cette égalité sera noté $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$).