Rappels sur les suites de fonctions (J-Y D)

Proposition (curiosité)

Soient X un espace topologique X, $\Omega \subseteq X$, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \overline{\Omega}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n(x) \text{ a une limite quand } x \underset{x\in\Omega}{\to} a \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ (f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } F \text{ lorsque } n \to +\infty. \end{array}\right.$

Alors $F(x)$ a une limite quand $x \underset{x\in\Omega}{\to} a$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} F(x)$ « interversion des limites ».

On obtient comme corollaire le résultat suivant.

Proposition 1 (« théorème convergence uniforme + continuité »)

Soient Ω un espace topologique, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n \text{ est continue en } a \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ (f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } F \text{ lorsque } n \to +\infty. \end{array}\right.$

Alors F est continue en a.

Proposition 2 (« théorème convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n \text{ est différentiable pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{il existe } x_0 \in \Omega \text{ pour lequel la suite } \big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0} \text{ converge}\,; \\ \text{la suite } (\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément.} \end{array}\right.$

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de Ω vers une fonction différentiable F telle que : $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 3 (« continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

Soient $[a,b]$ un segment $(a<b)$, Ω une partie de $\mathbb{R}^N$ et I un intervalle infini.

(a) Si $f\colon [a,b]\times\Omega \to \mathbb{C}$ est continue, alors $F\colon x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur Ω.

(b) Si $f\colon [a,b]\times I \to \mathbb{C}$ est continue et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue, alors $F\colon x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F'\colon x \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$.

On se donne maintenant un espace mesurable T muni d'une mesure positive μ, et des applications f_t, $t \in T$, d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. Quand $T = \mathbb{N}$ avec la mesure de comptage, les propositions 1' et 2' donneront les proposition 1 et 2 dans le cas de la convergence normale.

Théorème (« théorème de convergence dominée ») (*)

On considère des applications φ_n, $n \in \mathbb{N}$, de T dans $\mathbb{C}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{la suite } (\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour } \mu\text{-presque tout } t \in T\,; \\ \text{(ii)} & \text{l'application } t \mapsto \varphi_n(t) \text{ est mesurable pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(t)| \leq g(t) \;\; \mu\text{-p. p.}. \end{array}\right.$

Alors $\left|\begin{array}{l} \text{il existe } \varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t) \;\; \mu\text{-p. p.}\,; \\ \underbrace{\textstyle\int_T \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_T \varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\,. \end{array}\right.$

(*) En particulier : si une suite d'applications continues $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ converge uniformément vers f, alors $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (prendre $T = [a,b]$ et $\varphi_n = f_n - f$).

Proposition 1' (« continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On fixe $a \in \Omega$.

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & f_t \text{ est continue en } a \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in T\,; \\ \text{(ii)} & \text{l'application } t \mapsto f_t(x) \text{ est mesurable pour tout } x \in \Omega\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \sup\limits_{x\in\Omega} |f_t(x)| \leq g(t) \;\; \mu\text{-p. p.}\,. \end{array}\right.$$

Alors l'application $F\colon x \mapsto \underbrace{\int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}}$ est continue en a.

Démonstration (idée)

Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Ω vérifiant $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, le théorème montre que :
$F(x_n) = \int_T f_t(x_n)\,\mathrm{d}\mu(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(a) = \int_T f_t(a)\,\mathrm{d}\mu(t)$. □

Proposition 2' (« différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & f_t \text{ est différentiable sur } \Omega \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in T\,; \\ \text{(ii)} & \text{l'application } t \mapsto f_t(x) \text{ appartient à } \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ pour tout } x \in \Omega\,;^{(*)} \\ \text{(iii)} & \text{il existe } \widetilde{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathrm{d}f_t(x)\| \leq \widetilde{g}(t) \;\; \mu\text{-p. p.}\,. \end{array}\right.$$

Alors
$$\left|\begin{array}{l} \text{l'application } F\colon x \mapsto \int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\mu(t) \text{ est différentiable sur } \Omega\,; \\ \mathrm{d}F(x)\cdot h = \underbrace{\int_T \mathrm{d}f_t(x)\cdot h\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \text{ pour tous } x \in \Omega \text{ et } h \in \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

Démonstration (idée)

Soit $a \in \Omega$. On se donne $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}^N$ avec $h_n \neq 0$ et $[a, a+h_n] \subseteq \Omega$ pour $n \geq 0$. On a :
$$\frac{F(a+h_n) - F(a) - \int_T \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n\,\mathrm{d}\mu(t)}{\|h_n\|} = \int_T \frac{f_t(a+h_n) - f_t(a) - \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n}{\|h_n\|}\,\mathrm{d}\mu(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car}$$
$$\frac{|f_t(a+h_n) - f_t(a) - \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n|}{\|h_n\|} \leq \sup_{0\leq\theta\leq1} \|\mathrm{d}f_t(a+\theta h_n) - \mathrm{d}f_t(a)\| \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in T.$$ □

résultat qui sera utilisé après le cours sur les fonctions holomorphes

Proposition 3' (« holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

Ici on choisit pour Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & f_t \text{ est holomorphe sur } \Omega \text{ pour } \mu\text{-presque tout } t \in T\,; \\ \text{(ii)} & \text{l'application } t \mapsto f_t(z) \text{ est mesurable pour tout } z \in \Omega\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \sup\limits_{z\in\Omega} |f_t(z)| \leq g(t) \;\; \mu\text{-p. p.}\,. \end{array}\right.$$

Alors
$$\left|\begin{array}{l} \text{l'application } F\colon z \mapsto \int_T f_t(z)\,\mathrm{d}\mu(t) \text{ est holomorphe sur } \Omega\,; \\ F^{(n)}(z) = \underbrace{\int_T f_t^{(n)}(z)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } z \in \Omega. \end{array}\right.$$

Démonstration (idée)

On rappelle qu'une application $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est différentiable et l'application $\mathrm{d}f(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in \Omega$ (équation de Cauchy-Riemann). Dans ce cas, pour tout $z \in \Omega$ on dispose d'un unique $f'(z) \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{d}f(z)\colon h \in \mathbb{C} \mapsto f'(z)\,h$.

Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$. Toute fonction holomorphe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie :
$f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+} \frac{f(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $z \in B(a,r)$ (cf. l'analycité des fonctions holomorphes).
D'où : $\sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})} |f_t'(z)| = \sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+} \frac{f_t(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{1}{2i\pi} \times 2\pi r \times \frac{g(t)}{(\frac{r}{2})^2}$ μ-presque partout.
Ainsi, la famille $(f_t'|_{B(a,\frac{r}{2})})_{t\in T}$ vérifie une hypothèses analogue à (iii) qui porte sur $(f_t)_{t\in T}$.

On applique la proposition 2 sur l'ouvert $B(a, \frac{r}{2})$ qui contient $z := a$, puis fait une récurrence. □

$(*)$ Lorsque Ω est convexe et $x_0 \in \Omega$, l'inégalité des accroissements finis permet de remplacer la condition (ii) par la condition suivante : « l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$ et $t \mapsto f_t(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ».