II. Espaces de Hilbert

Formes hermitiennes

1) On se donne une application continue u de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, où $a<b$.
   On pose : $\phi(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}u(t)\,\mathrm{d}t$ pour tous $f,g\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$.
   a) Montrer que : ϕ est une forme hermitienne si et seulement si $u([a,b])\subseteq\mathbb{R}$.
   b) Montrer que : ϕ est une forme hermitienne positive si et seulement si $u([a,b])\subseteq\mathbb{R}^+$.
   c) Montrer que : ϕ est un produit scalaire si et seulement si $u([a,b])\subseteq\mathbb{R}^+$ et la partie $\{x\in[a,b]\mid u(x)=0\}$ de $[a,b]$ est d'intérieur vide.

2) On se donne une application continue K de $[a,b]\times[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, où $a<b$.
   a) On suppose que $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$ pour tous $s,t\in[a,b]$.
   Montrer que l'application $\psi\colon\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})\times\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ définie par
   $$\psi(f,g)=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g(t)}K(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
   est une forme hermitienne sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$.
   b) On prend ici $a=0$, $0<b<1$ et $K(s,t)=\frac{1}{1-st}$ pour $s,t\in[0,b]$.
   Montrer que K satisfait la condition du a) et que la forme hermitienne ψ associée vérifie
   $$\forall f\in\mathscr{C}([0,b],\mathbb{C})\qquad \psi(f,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^b f(t)t^n\,\mathrm{d}t\right|^2.$$
   c) Montrer à l'aide du théorème de Weierstrass (*) que le ψ du (b) est un produit scalaire.

3) Soit $(E,\|\ \|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.
   a) On suppose que $(E,\|\ \|)$ est un espace préhilbertien.
   Démontrer *l'identité du parallélogramme* : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ pour tous $x,y\in E$ (« la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses cotés »).
   b) On suppose que $(E,\|\ \|)$vérifie l'identité du parallélogramme.
   Démontrer que $(E,\|\ \|)$ est un espace préhilbertien.
   Indication : poser $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\right)$ pour tous $x,y\in E$, puis vérifier que pour tous $x,y,z\in E$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a
   (i) $\varphi(x,x)=\|x\|^2$; (ii) $\varphi(y,x)=\overline{\varphi(x,y)}$; (iii) $\varphi(x+y,z)=2\varphi(x,z/2)+2\varphi(y,z/2)$;
   (iv) $\varphi(x,y)=2\varphi(x,y/2)$; (v) $\varphi(x+y,z)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z)$; (vi) $\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)$.
   (Dans (vi) traiter successivement les cas $\lambda\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{Q}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{C}$.)

4) Soit $p\in[1,+\infty]$. On rappelle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{C}^2$, on a posé :
   $\|(x,y)\|_p=(|x|^p+|y|^p)^{1/p}$ si $p<+\infty$, et $\|(x,y)\|_\infty=\max(|x|,|y|)$.
   Démontrer que la norme $\|\ \|_p$ est issue d'un produit scalaire si et seulement si $p=2$.
   Indication : tester l'identité du parallélogramme sur les vecteurs de la base canonique.

5) La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}([0,1])$ est-elle issue d'un produit scalaire ?

(*) **Théorème de Weiertrass.** L'espace vectoriel des fonctions polynomiales complexes sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Théorème de Stone-Weiertrass. Soient X un espace topologique compact et $H\subseteq\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$.
On suppose que
(i) H est une *sous-algèbre* de $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ (c-à-d un sous-espace vectoriel stable par produit) ;
(i) H contient les constantes ;
(iii) H *sépare les points* (c-à-d pour $x,y\in X$ distincts, il existe $h\in H$ tel que $h(x)\neq h(y)$).
Alors H est dense dans $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Orthonormalisation.

6) Pour $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on définit
$$\langle f, g\rangle = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

b) Soient $f_0, f_1, f_2 \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ définies par
$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 \text{ pour } t \in [0,1].$$
Déterminer la projection orthogonale de f_2, au sens du produit scalaire précédent, sur le sous-espace vectoriel engendré par f_0 et f_1.

c) Quelle famille orthonormée se déduit de (f_0, f_1, f_2) par le procédé de Gram-Schmidt ?

7) On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire ϕ défini par
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour } P, Q \in \mathbb{R}_2[X].$$
a) Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

8) Dans un espace préhilbertien E, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée ($n \geq 1$).

a) Soit H un hyperplan de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que : $\sum\limits_{i=1}^n d(e_i, H)^2 = 1$.

b) Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $\sum\limits_{i=1}^n \|e_i - x_i\|^2 < 1$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Indication : raisonner par l'absurde dans le cas où $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Espaces de Hilbert

9) Montrer qu'un espace de Hilbert de dimension infinie n'a pas de base orthonormée. (Cela explique la nécessité d'introduire la notion de « base hilbertienne ».)

10) On note $H^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une application mesurable 1-périodique $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de carré intégrable sur $[0,1]$ telle que :
$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ (noter que } \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty).$$
a) Soit $f \in H^1(\mathbb{T})$. Montrer que la fonction g ci-dessus est déterminée modulo l'égalité presque partout, et que f est une fonction continue sur $\mathbb{T}$.

b) On introduit l'application $N_2\colon H^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^+$ définie avec les notations du (a), par :
$$N_2(f) := \left(\|f\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}([0,1])} + \|g\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}([0,1])}\right)^{1/2} \text{ pour } f \in H^1(\mathbb{T}).$$
Montrer que $(H^1(\mathbb{T}), N_2)$ est un espace de Hilbert.

11) On pose : $e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Démontrer que $(e_k)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ formée de vecteurs propres de l'opérateur différentiel $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\colon \mathscr{C}^\infty([0,1] \to L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$. (**)

Indication : prolonger $f \in L^2_{\mathbb{C}}(]0,1[)$ en $\widetilde{f}$ impaire et poser $g(x) = \widetilde{f}(2x)$ si $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

12) On note : $H^1_0(\mathbb{T}) = \{f \in H^1(\mathbb{T}) \mid f(0) = 0\}$.

a) Soit $f \in H^1_0(\mathbb{T})$. Démontrer que : $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{H^1}$.

b) En déduire que $H^1_0(\mathbb{T})$ est fermé dans $H^1(\mathbb{T})$.

c) On note $\widetilde{e}_k$ le prolongement 1-périodique de l'application e_k de l'exercice 11. Démontrer que $\left(\frac{\widetilde{e}_k}{\sqrt{1+k^2\pi^2}}\right)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de $H^1_0(\mathbb{T})$ muni de la norme de $H^1(\mathbb{T})$.

Indication : généraliser la formule d'intégration par parties en montrant que pour tous $g_1, g_2 \in L^1([a,b])$ ($a < b$) et $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, en posant $f_i(x) = r_i + \int_a^x g_i(t)\,\mathrm{d}t$ pour $i \in \{1,2\}$ on a $\int_a^b (f_1(t)g_2(t) + g_1(t)f_2(t))\,\mathrm{d}t = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a)$.

(**) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On peut démontrer que $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ a une base hilbertienne formée de fonctions C^∞ « nulles sur le bord $\partial\Omega$ de Ω » (en un certain sens) qui sont des vecteurs propres de $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Cela permet de résoudre l'équation du tambour suivante : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2\,\Delta f$ et $f_{|\partial\Omega} = 0$ où $\omega > 0$.