

# Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

## Définition

On se donne un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On appelle *produit scalaire sur  $E$*  une application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  de  $E^2$  dans  $\mathbb{K}$  telle que

- (i) l'application  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  est linéaire pour tout  $y \in E$ ;
- (ii) on a :  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$  pour tous  $x, y \in E$ ;
- (iii) on a :  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$  pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ .

Dans ce cas l'*orthogonal* d'une partie  $A$  de  $E$  est :  $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0\}$ .

## Définition-Proposition

(a) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire.

Dans ce cas, l'application  $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}^+$  est une norme sur  $E$ .

De plus, pour tous  $x, y \in E$ , on a :

- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  « inégalité de Cauchy-Schwarz » ;
- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y)$  liée ;
- $4\langle x, y \rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$  « identité de polarisation ».

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

## Exemples

(a) Soient  $I$  un ensemble et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On pose :

$$l_{\mathbb{K}}^2(I) := \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sum_{i \in I} |a_i|^2 < +\infty\} \text{ et } \|a\|_2 := \left( \sum_{i \in I} |a_i|^2 \right)^{1/2} \text{ pour } a = (a_i)_{i \in I} \in l_{\mathbb{K}}^2(I).$$

L'espace vectoriel  $l_{\mathbb{K}}^2(I)$  muni de  $\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} a_i \overline{b_i}$  est un espace de Hilbert de norme  $\|\cdot\|_2$ .

(b) Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. On note  $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$  l'espace vectoriel des classes modulo l'égalité  $\mu$ -presque partout de fonctions mesurables  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  dont le carré est intégrable.

L'espace vectoriel  $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$  muni de  $\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(x)$  est un espace de Hilbert.

## Proposition

Soient  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $C$  un convexe fermé non-vidé de  $E$ .<sup>(\*)</sup>

(a) Pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $x_0 \in C$  tel que :  $d(x, x_0) = d(x, C)$ .

On notera  $p_C(x) := x_0$  et dira que  $p_C(x)$  est la *projection de  $x$  sur le convexe  $C$* .

(b) Soit  $x \in E$ . Le vecteur  $p_C(x)$  est l'unique  $x_0 \in C$  vérifiant :  $\operatorname{Re} \langle \overrightarrow{x_0 x}, \overrightarrow{x_0 c} \rangle \leq 0$  pour  $c \in C$ .

(c) L'application  $p_C: E \rightarrow C$  est 1-lipschitzienne.

## Proposition

Soient  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .<sup>(\*\*)</sup>

(a) Pour tout  $A \subseteq E$ , la partie  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .

(b) Soit  $x \in E$ . Le vecteur  $p_F(x)$  est l'unique  $y \in F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ .

(c) On a :  $(F^\perp)^\perp = F$  et  $F \oplus F^\perp = E$ .

En particulier, pour tout  $A \subseteq E$ , on a :  $\overline{\operatorname{Vect} A} = E \iff A^\perp = \{0\}$ . ←[remarquer que  $(\overline{\operatorname{Vect} A})^\perp = A^\perp$ ]

(d) Ainsi la projection  $p_F: E \rightarrow F$  de  $E$  sur le convexe  $F$  est la restriction de la projection linéaire  $\widetilde{p}_F: E \rightarrow E$  de  $E$  sur  $F$  parallèlement au sous-espace vectoriel fermé  $F^\perp$  de  $E$ .

(\*) L'hypothèse «  $E$  est un espace préhilbertien et  $C$  est un convexe complet non-vidé de  $E$  » suffit.

(\*\*) L'hypothèse «  $E$  est un espace préhilbertien et  $F$  est un sous-espace vectoriel complet de  $E$  » suffit.

## Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On note  $E'$  l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ . L'application  $E \rightarrow E'$  est bijective et conserve la norme. Elle est aussi « semi-linéaire » :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad \forall y_1, y_2 \in E \quad \langle \cdot, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle \cdot, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle \cdot, y_2 \rangle.$$

## Définition

Soient  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthonormée dans  $E$ .

On dit que la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne de  $E$  si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

- (i)  $\overline{\text{Vect}\{e_i\}_{i \in I}} = E$ ;
- (ii)  $\forall x \in E \quad \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ ; ← l'inégalité  $\leq$  est toujours réalisée
- (iii)  $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$  sommable et  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$ .

## Exemple

L'espace de Hilbert  $l_{\mathbb{K}}^2(I)$  admet pour base hilbertienne la famille de vecteurs  $(\delta_i)_{i \in I}$  définie par :

$$\delta_i(j) = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad \text{et} \quad \delta_i(i) = 1.$$

## Théorème

Soit  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

(a) L'espace de Hilbert  $E$  possède une base hilbertienne  $(e_i)_{i \in I}$ .<sup>(\*)</sup>

Dans ce cas  $E \rightarrow l_{\mathbb{K}}^2(I)$  est une bijection de réciproque  $l_{\mathbb{K}}^2(I) \rightarrow E$  avec  $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ .  
 $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$   $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$

(b) Toutes les bases hilbertiennes de  $E$  ont même cardinal.

On appelle *dimension hilbertienne* de  $E$  ce cardinal.

## Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  qui a une partie dénombrable dense  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ .

Il existe une famille libre  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  de vecteurs de  $E$ , avec  $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ou  $\mathbb{N}' = \{1, \dots, N\}$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ , telle que  $\text{Vect}(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  est dense de  $E$  (par exemple extraite de  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ).<sup>(\*\*)</sup>

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  de  $E$  ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1 \leq k \leq n-1} \langle v_n, e_k \rangle e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  dans  $E$  telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

(\*) Il existe un espace préhilbertien (sans partie dénombrable dense) qui n'a aucune base hilbertienne. Un contre-exemple se trouve dans Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre V, §2, exercice 2.

(\*\*) Par exemple :  $v_n = x_{\alpha(n)}$  où  $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, \dots, v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$ .