III. Séries de Fourier

1) Soit $g : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{2} - x$ quand $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.
   a) Calculer les coefficients de Fourier de g.
   b) En déduire que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On pose $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi\alpha x}$ quand $0 \leq x < 1$.
   a) Montrer, en appliquant l'identité de Bessel-Parseval, que :
$$\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi\alpha}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}.$$
   b) Retrouver ainsi la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\left(\sum \frac{\sin(2n\pi x)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge et : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n} = \pi(\frac{1}{2} - x)$.

4) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\left(\sum \frac{\cos(2n\pi x)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge et : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n} = -\ln(2\sin(\pi x))$.

5) Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$.
   a) Déterminer la série trigonométrique associée à f et calculer sa somme.
   On notera $(S_n(f))_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série trigonométrique de f.
   b) Montrer qu'il existe un point $(0, b)$ de l'axe des ordonnées avec $b \notin [f(0^-), f(0^+)]$ qui est adhérent à la réunion des graphes des S_n, $n \geq 1$ « phénomène de Gibbs ».
   Indication : étudier $\left(S_{2n-1}(f)(\frac{1}{4n})\right)_{n\geq 1}$ avec $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \geq \int_0^3 \sum\limits_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,\mathrm{d}u \geq 1{,}84$.

6) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On pose : $f_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(t + \frac{k}{n}\right)$ pour $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{T}$.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{T})$ vers la fonction constante $\widehat{f}(0)$.

7) Soit $a \in \mathbb{T}$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on note $\tau_a(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{T} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t-a) \end{array} \in L^2(\mathbb{T})$.
   a) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Montrer que : $\lim\limits_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_2 = 0$.
   Indication : commencer par montrer cette égalité quand f est continue.
   b) En déduire que : si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, alors $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

8) Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité suivante, utile juste après :
$$(\star) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R},\, n\geq 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2\pi kx)}{k} \right| < +\infty$$
   a) *Première méthode (« transformation d'Abel » sur des sommes partielles).*
   Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ des suites dans $\mathbb{C}$ et $p \leq q$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. On constate que :
$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = -u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) V_n + u_q V_q \quad \text{où} \quad V_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{1\leq k\leq n} v_k \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$
   Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ $\left| \sum\limits_{n=p}^{q} \frac{\sin(2n\pi x)}{n} \right| \leq \frac{2}{p\,\sin(\pi x)}$.
   Conclure en utilisant une décomposition de la forme $\sum\limits_{n=1}^{q} \ldots = \sum\limits_{n=1}^{[1/x]} \ldots + \sum\limits_{n=[1/x]+1}^{q} \ldots$.
   b) *Seconde méthode (« transformation d'Abel » sur une intégrale).*
   On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2\pi kx) = \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{2}$.
   Montrer que l'application $\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est bornée.
   Conclure.

9) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose : $b_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2n\pi t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer avec l'exercice précédent et l'exercice 3, que la série $\left(\sum \frac{b_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge.

b) En déduire que la série de fonctions $\left(\sum \frac{\sin(2n\pi x)}{\ln(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ n'est la série trigonométrique d'aucune fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

c) Montrer que, cependant, la série de fonctions $\left(\sum \frac{\sin(2n\pi x)}{\ln(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 1-périodique, qui est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

10) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, décroissante de limite nulle, telle que :

$$a_n \leq \tfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1}) \quad \text{si } n \geq 1.$$

On pose : $u_n = a_n - a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante.
Montrer que la série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 0$.

b) Montrer que la série $\left(\sum n(u_{n-1}-u_n)\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

c) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(u_{n-1}-u_n)\underbrace{F_{n-1}(t)}_{\text{noyau de Fejér}}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{T}$.

d) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}\quad \widehat{f}(k) = a_{|k|}$. (*)

e) En déduire que la série de fonctions $\left(\sum \frac{\cos(2n\pi x)}{\ln(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ est la série trigonométrique d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

11) On pose : $A(\mathbb{T}) = \left\{t \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n t}\ ;\ \left(c_n\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})\right\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

a) Quelle est la transformée de Fourier d'un élément $f : t \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n t}$ de $A(\mathbb{T})$?

b) Montrer que l'application $A(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} l^1(\mathbb{Z})$ est bijective.

12) a) Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, décroissante vers 0.
Montrer à l'aide de la transformation d'Abel que la série de fonctions $\left(\sum \varepsilon_n \frac{\sin(2n\pi x)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ vers une fonction continue f sur $\mathbb{T}$. Déterminer $\widehat{f}$.

b) Conclure de ce qui précède que l'inclusion $A(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T})$ est stricte.

13) On considère l'équation différentielle

$$(\star\star)\quad y'' + 2y' - 3y = b(x)$$

où $b(x) = |\sin(\pi x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $(\star\star)$ a au plus une solution f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$.

b) Vérifier que $(\star\star)$ a une unique solution dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$.
Indication : étudier la seule famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ susceptible d'être la transformée de Fourier d'une solution de $(\star\star)$.

14) On note $W^{1,1}(\mathbb{T})$ (resp. $W^{1,2}(\mathbb{T})$ ou $H^1(\mathbb{T})$) l'ensemble des fonctions qui sont de la forme $a + \int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $a \in \mathbb{C}$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$ (resp. $g \in L^2(\mathbb{T})$) avec $\widehat{g}(0) = 0$.
La notation $\int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t$ ci-dessus représente la fonction $x \in \mathbb{T} \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $H^1(\mathbb{T}) \subseteq W^{1,1}(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

b) Soit $f = a + \int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t \in W^{1,1}(\mathbb{T})$. Exprimer $\widehat{g}(n)$ en fonction de $\widehat{f}(n)$ pour $n \neq 0$.

c) Montrer que $W^{1,1}(\mathbb{T}) \subseteq \left\{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \widehat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$.

d) Montrer que : $\forall f \in L^1(\mathbb{T})\quad f \in H^1(\mathbb{T}) \iff \left(n\,\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

e) Montrer que $H^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T})$,
Vérifier qu'il n'y a aucune inclusion entre $A(\mathbb{T})$ et $W^{1,1}(\mathbb{T})$.

(*) Ce résultat admet le corollaire suivant :
si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $|\widehat{f}(n)| \geq u_{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.