Équation des cordes vibrantes

On se propose d'étudier l'équation des cordes vibrantes :

$$(\star) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \ \text{ et } \ f(0,t) = f(\tfrac{1}{2},t) = 0 \qquad \text{où} \quad \omega > 0$$

associée au faibles mouvements d'une corde tendue fixée en ses extrémités d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, où $f(x,t)$ désigne la hauteur du point de la corde d'abscisse x à l'instant t. (*)

1) On suppose que $f\colon [0,\frac{1}{2}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 (au sens où elle est restriction d'une application $\widetilde{f}$ de classe C^2, d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant $[0,\frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$) et vérifie $(\star)$.
   On considère l'application $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déterminée par :
   (i) $g(x,t) = f(x,t)$ pour $x \in [0,\frac{1}{2}]$ et $t \in \mathbb{R}$;
   (ii) $g(-x,t) = -g(x,t)$ pour $x,t \in \mathbb{R}$; $\longleftarrow$[définition quand $0 < x < \frac{1}{2}$, découle de (i) et (iii) quand $x \in \mathbb{R}$]
   (iii) $g(x+1,t) = g(x,t)$ pour $x,t \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que g est une solution de classe C^2 de $(\star)$.

2) On considère une application $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ qui est impaire en x et 1-périodique en x.
   a) Démontrer qu'il existe des applications $b_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ uniques telles que :
   $f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\sin(2\pi n x)$ pour $x,t \in \mathbb{R}$ avec convergence normale en x à t fixé.
   b) Démontrer que f vérifie $(\star)$ si et seulement si $b_n'' + 4\omega^2\pi^2 n^2 b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

3) On se donne $\varphi \in \mathscr{C}^3(\mathbb{T},\mathbb{R})$ impaire et $\psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{T},\mathbb{R})$ impaire.
   Démontrer que $(\star)$ a une unique solution f comme dans l'exercice précédent, telle que :
   $$f(x,0) = \varphi(x) \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \ ^{(**)}$$

4) On lâche la corde sans vitesse initiale ($\psi = 0$).
   a) Démontrer que la solution de la question précédente est donnée par :
   $$f(x,t) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi(x-\omega t) + \varphi(x+\omega t)\big).$$
   b) On fixe $\epsilon > 0$, et choisit φ impaire et 1-périodique déterminée par :
   $$\begin{cases} \varphi(x) = \varepsilon \exp\big(\frac{1}{(8x-1)(8x-3)}\big) \ \text{ pour } \ \frac{1}{8} < x < \frac{3}{8}\,; \\ \varphi(x) = 0 \ \text{ pour } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \ \text{ ou } \ \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   Représenter graphiquement l'allure de la corde aux temps $\frac{k}{8}$ avec $k \in \{0,1,...,8\}$ et décrire le mouvement de la corde. On supposera que $\omega = 1$ et ϵ est « petit ».

(*) On note $\overrightarrow{T}(s)$ tension exercée par la partie droite de la corde au point d'abscisse curviligne s, placé en $\overrightarrow{M}(s)$, et λ la densité de la corde. On applique le principe fondamental de la dynamique à t fixé au morceau de corde d'abscisses curvilignes comprises entre s et $s+h$, en négligeant les effets de la pesanteur :

$$-\overrightarrow{T}(s) + \overrightarrow{T}(s+h) \underset{h\to 0}{=} \lambda h \, \frac{\partial^2 \overrightarrow{M}(s)}{\partial t^2} + o(h) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial s}(s,t) = \lambda \, \frac{\partial^2 \overrightarrow{M}}{\partial t^2}(s,t).$$

On suppose $\overrightarrow{T}$ tangentielle (corde sans raideur) de norme constante, donc $\overrightarrow{T}(s) = T_0(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$. Dans le cas de de faibles déplacements verticaux : $s = x$, $\overrightarrow{M}(s) = (x, f(x))$, $\tan\theta(s) = \frac{\partial f}{\partial x}$, puis $\overrightarrow{T}(s) \simeq (T_0, T_0 \frac{\partial f}{\partial x})$.

On en déduit l'équation des cordes vibrantes en choisissant $\omega := \sqrt{\frac{\lambda}{T_0}}$.

(**) Voici une méthode sans série de Fourier. Le changement de variable $(u,v) = (x-\omega t, x+\omega t)$ donne :
$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = -\omega\frac{\partial f}{\partial u} + \omega\frac{\partial f}{\partial v}$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$
puis $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial t} - \omega\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial x})f = (-2\omega\frac{\partial}{\partial u})(2\omega\frac{\partial}{\partial v})f = -4\omega^2 \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial v})$.

Ainsi l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ équivaut à l'existence de $k \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2\omega}) = k(v)$ (ce qui s'écrit $f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2\omega}) = K(v) + f(\frac{u}{2}, \frac{-u}{2\omega})$ en notant K la primitive de k nulle en 0), c'est-à-dire à l'existence de $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f(x,t) = f_1(x-\omega t) + f_2(x+\omega t)$.

On en déduit que la solution f de l'exercice 3 s'écrit :

$$\boxed{f(x,t) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi(x+\omega t) + \varphi(x-\omega t)\big) + \tfrac{1}{2\omega}\int_{x-\omega t}^{x+\omega t} \psi(s)\,\mathrm{d}s} \qquad \text{« formule de d'Alembert ».}$$