Séries de Fourier : à retenir (J-Y D)

Proposition

Soient $(a_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

On pose : $\quad S_n(x) \;=\; a_0 \;+\; \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n}\big(a_k\cos(2\pi kx)+b_k\sin(2\pi kx)\big)\quad$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

(a) Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|<+\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|<+\infty$ alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

en marge du programme $\left\{\right.$ (b) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont des suites de réels décroissantes de limite 0, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

(c) Si $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une application notée f, alors $f\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$ et, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ se déduisent de f par les formules intégrales du (a) ci-dessous.

Définition

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

(a) On pose : $\quad \widehat{f}(n)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\,\mathrm{d}t\quad$ pour $n\in\mathbb{Z}$,

$a_0=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,\;\; a_n=2\int_0^1 f(t)\,\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t\;$ et $\;b_n=2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t\;$ pour $n\geq 1$.(*)

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle *somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f* la fonction $S_n(f)$ déterminée par : $\quad S_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx}=a_0+\sum_{1\leq k\leq n}(a_k\cos(2\pi kx)+b_k\sin(2\pi kx))$.

complément $\left\{\right.$

Théorème (« théorème de Riemann-Lebesgue »)

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

La « suite » $\widehat{f}:=(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $c_0(\mathbb{Z}):=\big\{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\mid \displaystyle\lim_{n\to-\infty}c_n=\lim_{n\to+\infty}c_n=0\big\}$.

Théorème (« théorème de Dirichlet »)

Soient $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ et $x_0\in\mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes (qui portent sur $f|_{\text{voisinage de }x_0}$) :

(i) f a des limites finies $f(x_0^-)$ à gauche en x_0 et $f(x_0^+)$ à droite en x_0 ;

(ii) $h>0\mapsto\frac{f(x_0-h)-f(x_0^-)}{h}$ et $h>0\mapsto\frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ ont des limites finies en 0^+.

Alors $\quad\boxed{S_n(f)(x_0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}}$.(**)

Proposition

La famille $\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Donc $\;\mathcal{F}_{L^2(\mathbb{T})}:\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \big(\underbrace{\widehat{f}(n)}_{\langle f,\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\rangle}\big)_{n\in\mathbb{Z}}\end{array}\;$ est $\underbrace{\text{une bijection de réciproque }\overline{\mathcal{F}}_{l^2(\mathbb{Z})}}_{\text{en particulier } S_n(f)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2(\mathbb{T}) \text{ lorsque } f\in L^2(\mathbb{T})}:\begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{Z}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sommable pour } \|\;\|_2}}{c_n\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}}\end{array}$

et on a $\quad\boxed{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\widehat{f}(n)\big|^2=\int_0^1|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\quad$ pour tout $f\in L^2(\mathbb{T})$ « égalité de Bessel-Parseval ».

(*) Ainsi : $\;\widehat{f}(0)=a_0,\;\widehat{f}(n)=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}$ et $\widehat{f}(-n)=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}$ pour $n\geq 1$;
$a_0=\widehat{f}(0),\;a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx)=\widehat{f}(-n)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}+\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}\;$ pour $n\geq 1$.

(**) Voici deux résultats difficiles à démontrer, relatifs à la « série de Fourier » $(S_n(f))_{n\geq 0}$ d'une fonction $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$:
(i) si $f\in\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ avec $1<p<+\infty$, alors $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge presque partout vers f « théorème de Carleson-Hunt » ;
(ii) il existe $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ tel que $(S_n(f))_{n\geq 0}$ diverge en tout point « contre exemple de Kolmogorov ».

complément

Définition-Proposition

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) On peut définir pour presque tout $x \in \mathbb{T}$: $\quad (f * g)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

(b) On a : $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

complément

Théorème

(a) La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{T})} : \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{T}) & \to & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est linéaire, injective et $\underbrace{\text{continue}}_{c_0(\mathbb{Z}) \text{ est muni de } \| \ \|_\infty}$.

(b) De plus, on a : $\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}}$ pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.

Il en résulte que le produit de convolution $*$ sur $L^1(\mathbb{T})$ est commutatif et associatif.

Lemme

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On introduit le *noyau de Dirichlet* D_n et le *noyau de Fejér* F_n :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k t} \quad \text{et} \quad F_n(t) = \tfrac{1}{n+1}\left(D_0(t) + \cdots + D_n(t)\right) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Ils vérifient : $\quad D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\,\pi t)}{\sin(\pi t)} \quad$ et $\quad F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2 \quad$ quand $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Théorème (« théorème de Fejér »)

Soit f un élément de $E := \mathscr{C}(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_\infty$. $\longleftarrow$[cet énoncé reste valable en prenant $E := L^1(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_1$]

La suite $\left(\frac{S_0(f)+\cdots+S_n(f)}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ qui s'écrit aussi $(F_n * f)_{n \geq 0}$, converge dans E vers f.

Remarques

(a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose $\sigma_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ « lemme de Cesàro ».

Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $(S_n(f)(x_0))_{n\geq 1}$ converge, on a donc $S_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

(b) Le th. de Fejér redonne la densité de l'algèbre des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ (conséquence du th. de Stone-Weierstrass) et l'injectivité de la transformation de Fourier.$^{(\star)}$

en marge du programme

Proposition

L'application $\overline{\mathcal{F}}_{l^1(\mathbb{Z})} : \begin{array}{ccc} l^1(\mathbb{Z}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{T}) \\ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \underset{n\in\mathbb{Z}}{\sum} c_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sommable pour } \| \ \|_\infty}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n \cdot}} \end{array}$ est linéaire, injective et continue.$^{(\star\star)}$

Il en résulte que toute $\underbrace{f \in \mathscr{C}(\mathbb{T}) \text{ telle que } \widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})}_{\text{par exemple } f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{T}),\text{ cf. la proposition ci-dessous}}$ vérifie $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n \cdot}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$. On a : $\boxed{\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\mathrm{i}\pi n)^k\, \widehat{f}(n)}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. $\longleftarrow$[penser à $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}$]

En particulier : toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{T})$ est somme de sa série de Fourier (car $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$).

$(\star)$ Il redonne aussi le th. de Weierstrass : toute fonction $f \in \mathscr{C}([a,b])$ avec $a < b$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. En effet, en introduisant l'unique $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ paire vérifiant $g(\frac{t}{2}) = f((1-t)a + tb)$ pour tout $t \in [0,1]$ et en fixant $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 0$ tel que $\|g - g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ où $g_n := \frac{S_0(g)+\cdots+S_n(g)}{n+1}$, puis il existe une somme partielle P du développement en série entière de g_n en 0 telle que $\|(P - g_n)|_{[0,1]}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

$(\star\star)$ L'injectivité découle du (c) de la proposition du début, car pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, la fonction continue $f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}$ vérifie $\widehat{f}(n) = c_n$ quand $n \in \mathbb{Z}$.