IV. Espaces $L^p(\mathbb{R})$ et convolution

1) a) Calculer les normes $\| \|_1$, $\| \|_p$ pour $1 < p < +\infty$, et $\| \|_\infty$ des fonctions :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\ ,\quad x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ ,\quad (1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ ,\quad \tfrac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,1]}(x)\ ,\quad \tfrac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\,.$$

b) Calculer les normes $\| \|_1$, $\| \|_p$ pour $1 < p < +\infty$, et $\| \|_\infty$ des fonctions :

$$\mathbb{1}_{(Oy)}(x,y)\ ,\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times\mathbb{Q}}(x,y)\ ,\ \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\mathbb{1}_{B(0,1)}(x,y)\ ,\ \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\mathbb{1}_{\complement_{\mathbb{R}^2}B(0,1)}(x,y)$$

2) On considère un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$, un nombre réel $p \geq 1$, et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^p(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers $f \in L^p(\mu)$.

Démontrer que : $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^p(\mu)}{\longrightarrow}} f \iff \|f_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_p$ (« lemme de Scheffé »).

Indication : appliquer le lemme de Fatou à $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p+|f|^p) - |f_n-f|^p$, $n \in \mathbb{N}$.

3) On considère $1 < p \leq +\infty$ et $f \in \mathscr{L}^p([0,1])$.

a) Soit $a \in [0,1]$. Montrer que la fonction $f\,\mathbb{1}_{[0,a]}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Indication : appliquer l'inégalité de Hölder au produit $f\,\mathbb{1}_{[0,a]}$.

Dans la suite on notera : $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [0,1]$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que :

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_p |x-y|^\alpha \quad \text{pour } x,y \in [0,1].$$

Indication : utiliser de nouveau Hölder.

4) a) On considère $1 \leq p < q < +\infty$.

Montrer que : $L^\infty([0,1]) \subsetneq L^q([0,1]) \subsetneq L^p([0,1])$ (inclusions strictes).

b) Montrer que pour tout $f \in L^\infty([0,1])$, on a : $\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

5) On considère $1 \leq p < q \leq +\infty$.

a) Montrer qu'on ne peut écrire aucune inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \subsetneq \bigcap_{p<r<q} L^r(\mathbb{R})$ (inclusion stricte).

Indication : écrire $r = \theta p + (1-\theta)q$ avec $\theta \in]0,1[$, et appliquer Hölder à $|f|^{\theta p}|f|^{(1-\theta)q}$.

c) Reprendre la preuve du b) pour montrer que $r \mapsto \ln(\|f\|_r^r)$ est une fonction convexe.

6) On considère $1 < p < +\infty$ et $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue positive à support compact.

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \frac{F(x)}{x}$ pour $x > 0$.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} G(x)^p\,\mathrm{d}x = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} G(x)^{p-1}f(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p\,\mathrm{d}x.$

Indication : utiliser une intégration par parties pour $G(x)^p \times 1$ puis Hölder.

b) Plus généralement, on suppose maintenant qu'on a seulement $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ (pas forcément continue), et $f \geq 0$. On définit les fonctions F et G comme au début.

Montrer que : $\|G\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p < +\infty$ « inégalité de Hardy ».

Indication : il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues positives à support compact dans $]0,+\infty[$ qui converge vers f dans $L^p_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$.

c) Montrer que l'inégalité de Hardy reste vraie si f n'est pas supposée positive.

d) Démontrer que la norme de l'endomorphisme $f \mapsto G$ de $L^p_{\mathbb{R}}(]0,+\infty[)$ est égale à $\frac{p}{p-1}$.

Indication : considérer $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}\,\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$, où $n \geq 1$.

7) a) On considère : $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$.
Déterminer $f * f$ et tracer son graphe.

b) On note : $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donner un sens à $f_\alpha * f_\beta$ et le calculer.

8) Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, on peut définir
$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$
et que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.
Indication : majorer $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, g(t)|\, \mathrm{d}t$ en utilisant l'égalité $|g| = |g|^{\frac{1}{p}} |g|^{\frac{1}{q}}$.

b) On suppose dans la suite de l'exercice que $1 < p < +\infty$.
Soit $f \colon]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ mesurable. On pose : $\varphi(f)(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{p}}\, f(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $\|\varphi(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(]0,+\infty[)} \leq +\infty$.

c) On se donne $f \in \mathscr{L}^p(]0, +\infty[)$ et lui associe G comme dans l'exercice 6.
Démontrer que $\varphi(G) = \varphi(f) * g$ où $g(v) = \mathrm{e}^{-\frac{v}{q}}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v)$ pour $v \in \mathbb{R}$.
En déduire une nouvelle démonstration de l'inégalité de Hardy.

9) Montrer qu'il n'existe aucun $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\delta * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Indication : raisonner par l'absurde, et considérer $f_n \colon x \mapsto \mathrm{e}^{-nx^2}$ puis une valeur particulière de x avant de faire tendre n vers $+\infty$.

10) On considère $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. On pose : $T_f(h) = f * h$ pour $h \in L^1(\mathbb{R})$.
D'après l'exercice 8 l'application linéaire $T_f \colon L^1(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ est continue et $\|T_f\| \leq \|f\|_p$.
Démontrer que $\|T_f\| = \|f\|_p$ en testant T_f sur une approximation de l'unité $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ (*).
Indication : quand $p = +\infty$, montrer qu'on a $\int_{\mathbb{R}} (f * \alpha_n)(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\breve{\alpha}_n * g)(t)\, \mathrm{d}t$ pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, où $\breve{\alpha}_n(u) = \alpha_n(-u)$, et admettre l'égalité $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\|g\|_1 \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right|$.

11) On considère $h > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose : $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $F_h \colon x \mapsto \int_x^{x+h} f(t)\, \mathrm{d}t$ sous la forme $f * \varphi_h$ pour un certain $\varphi_h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $G_h \colon x \mapsto \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $h \to 0^+$.

12) On considère $1 \leq p \leq +\infty$ et $C = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0 \text{ presque partout}\}$.

a) On suppose que $p = +\infty$.
Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ appartient à l'intérieur de C dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

b) On suppose que $p < +\infty$.
Montrer que C est d'intérieur vide dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

13) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
On pose : $C = \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu) \mid f(x) \geq 0 \text{ presque partout}\}$.

a) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$.

b) Montrer qu'on a : $p_C(f) = f^+$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$.

(*) Par exemple, par convergence dominée : $\alpha_n(x) = n\, \alpha(nx)$ pour $n \geq 1$, où $\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\, \mathrm{d}t = 1$.