Espaces L^p et convolution : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, un ensemble I, et $1 \leq p, q \leq +\infty$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Rappels

(a) Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\liminf_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x)}_{\text{mesurable en } x} \,\mathrm{d}\mu(x) \;\leq\; \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{« lemme de Fatou ».}$$

(b) Pour toute suite *croissante* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{mesurable en } x} \,\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{« théorème de Beppo-Levi ».}$$

Définition

(a) On dira qu'une propriété portant sur $x \in X$ est vérifiée *μ-presque partout* si l'ensemble des points x qui ne la vérifient pas est inclus dans une partie mesurable A telle que $\mu(A) = 0$.

(b) Pour toute application mesurable $f\colon X \to \mathbb{C}$, on note :

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty \quad \text{si } p < +\infty$$

et $\|f\|_\infty := \min\left\{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \ \mu\text{-presque partout}\right\} \leq +\infty$ où $\min\emptyset := +\infty$.

Lorsque X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de $\mathrm{d}x$, et $f \in \mathscr{C}(X)$, on a en ce sens : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

(c) On note $\mathscr{L}^p(\mu) := \left\{f\colon X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\right\}$ et $L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/\mathcal{N}_\mu$ (*) où $\mathcal{N}_\mu$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p$ formé des fonctions mesurables nulles μ-presque partout.

On pose : $l^p(I) = L^p(I, \mathscr{P}(I), \mathrm{Card})$ et $L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, \mathrm{Borel}, \mathrm{d}x) \overset{\mathrm{can}}{\xrightarrow{\sim}} L^p(\mathbb{R}, \mathrm{Lebesgue}, \mathrm{d}x)$.

(d) La famille $(l^k(I))_{1\leq k\leq+\infty}$ croît, et, la famille $(L^k(\mu))_{1\leq k\leq+\infty}$ décroît lorsque $\mu(X) < +\infty$.

Proposition

Soient $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ deux applications mesurables.

(a) On a : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty$ « inégalité de Minkowski ».

[Si $1 < p < +\infty$ et $f, g \in L^p(\mu)$, on a : $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha\, f(x) = \beta\, g(x)$ p. p.]

(b) On a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$ « inégalité de Hölder ».

[Si $1 < p < +\infty$, $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$, on a : $\|fg\|_1 = \|f\|_p\|g\|_q$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha|f(x)|^p + \beta|g(x)|^q = 0$ p. p.]

Théorème (« théorème de Riesz-Fischer »)

(a) L'espace vectoriel $L^p(\mu)$ muni de $\dot{f} \mapsto \|f\|_p$ est un espace de Banach.

En particulier $L^2(\mu)$ muni de $\dot{f} \mapsto \|f\|_2$ est un espace de Hilbert.

issu de la dém. du (a)

(b) Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\mathscr{L}^p(\mu)$, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ $\underbrace{\text{a une suite extraite } (f_{n_k})_{k\geq 0} \text{ qui}}_{\text{inutile quand } p = +\infty}$ converge simplement presque partout vers f.

[*Attention :* en posant $f_{2^k+l} = \mathbb{1}_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$ quand $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq l < 2^k$, on détermine une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{L}^p([0,1])$ qui converge vers 0 quand $p < +\infty$, mais pour tout $x \in [0,1]$ la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est divergente. Cependant, on a : $f_{2^k+1}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.]

(*) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous-espace vectoriel de E.
On pose $\underbrace{\dot{x}}_{\text{« classe de } x \text{ »}} := \{x + y\,;\, y \in F\}$ quand $x \in E$, puis $E/F := \left\{\dot{x}\,;\, x \in E\right\}$.

L'ensemble E/F muni des « lois » portant sur $u, v \in E/F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ déterminées par les égalités

(i) $u + v := \dot{\widehat{x+y}}$ indépendamment du choix d'éléments x, y de E tels que $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$

(ii) $\alpha{\times}u := \dot{\widehat{\alpha x}}$ indépendamment du choix d'un élément x de E tel que $u = \dot{x}$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé $\mathbb{K}$-*espace vectoriel quotient de E par F*.

Théorème

On peut définir l'application linéaire suivante : $\begin{array}{ccc} L^q(\mu) & \longrightarrow & \overbrace{(L^p(\mu))'}^{\text{dual topologique de } L^p(\mu)} \\ g & \longmapsto & \left(f \mapsto \int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right) \end{array}$.

Elle conserve la norme et est bijective, quand $p = 1$ et μ est σ-finie, et quand $1 < p < +\infty$(*). Elle conserve la norme quand $p = +\infty$, mais n'est pas surjective dans le cas de $l^1(\mathbb{N}) \to (l^\infty(\mathbb{N}))'$.

Définitions

(a) On note $\mathscr{L}^{p\,loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications mesurables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à tout segment $[a, b]$ appartient à $\mathscr{L}^p([a, b])$. Il contient $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $f \in \mathscr{L}^{1loc}(\mathbb{R})$. Le support de f est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ en dehors duquel f s'annule presque partout. En particulier, quand f est continue il s'écrit : $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$.

(c) Pour tout intervalle ouvert J on note $\mathscr{C}_c^\infty(J) := \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(J) \mid \operatorname{Supp} f \text{ compact}\right\}$.

(d) On note $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mathbb{R})$ formé des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de limites nulles en $-\infty$ et en $+\infty$, et $\mathscr{C}_0(\mathbb{T}) = \mathscr{C}(\mathbb{T}) \subseteq L^\infty(\mathbb{T})$.

complément

Définition-Proposition (vraie avec $\mathbb{T}$ à la place de $\mathbb{R}$)

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) On peut définir pour presque tout $x \in \mathbb{R}$: $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) On a : $\operatorname{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g}$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

(c) Si $p = 1$, on a : $g * f = f * g$ et $f * (g * h) = (f * g) * h$.

[Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. On peut définir pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, $f * g$ est uniformément continue (de limite nulle en l'infini quand $p < +\infty$ et $q < +\infty$) et vérifie : $\|(f * g)\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty$.]

complément

Définition-Proposition ($G = \mathbb{T}$ ou $\mathbb{R}$)

(a) On dira ici qu'une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(G)$ est $\underbrace{\textit{une approximation de l'unité}}_{\text{existe, cf. } \alpha_n(x) = n\,\alpha(nx) \text{ avec } \alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}),\ \alpha \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\,\mathrm{d}t = 1.}$ si :

(i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_G \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout $n \geq 0$;

(ii) $\int_{\complement_G V} \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout voisinage V de 0.

Dans ce cas, si $p < +\infty$: $\forall f \in L^p(G)$ $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p(G)} f$ et $\forall f \in \mathscr{C}_0(G)$ $f * \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^\infty(G)} f$.(**)

(b) On dira ici qu'une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{C}_c^\infty(G, \mathbb{R})$ est $\underbrace{\textit{une suite régularisante}}_{\text{existe, cf. } \alpha_n(x) = n\,\alpha(nx) \text{ avec } \alpha(x) = k\exp(-\frac{1}{1-x^2})\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)}$ si :

(i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_G \alpha_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout $n \geq 0$;

(ii) pour tout voisinage V de 0 dans G, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Supp} \alpha_n \subseteq V$ dès que $n \geq N$.

Dans ce cas $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'unité et $f * \alpha_n$ est C^∞ quand $f \in L^p(G)$.

Proposition

(a) Si $p < +\infty$: $\operatorname{Vect}\big(\mathbb{1}_A\big)_{A\in\mathcal{A} \text{ et } \mu(A)<+\infty}$ est dense dans $L^p(\mu)$.

(b) Si $p < +\infty$ et J est un intervalle ouvert : $\operatorname{Vect}\big(\mathbb{1}_{[a,b]}\big)_{a,b\in J}$ et $\mathscr{C}_c^\infty(J)$ sont denses dans $L^p(J)$.

(c) L'espace vectoriel $\operatorname{Vect}\big(\mathbb{1}_A\big)_{A\in\mathcal{A}}$ est dense dans $L^\infty(\mu)$.

(d) L'adhérence de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est égale à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

(*) Ce dernier résultat, difficile à obtenir sans l'hypothèse « μ σ-finie », se trouve à la page 231 du livre *Real and Abstract Analysis* de Hewitt et Stromberg.

(**) On retrouve le théorème de Fejér en choisissant $\alpha_n = F_n$ pour tout $n \geq 0$.