V. Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$

1) a) On pose $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ pour $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ à l'aide de la formule des résidus.

Indication : quand $\xi\geq 0$, utiliser la fonction méromorphe $h\colon z\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i\xi z}}{z^2+1}$ et le lacet γ qui décrit le segment $[-r,r]$ et le demi-cercle formé des $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $-\pi\leq\theta\leq 0$.

b) Retrouver ce résultat en calculant la transformée de Fourier de l'application $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\mathrm{e}^{-2\pi|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Calculer $g*g$ et en déduire la transformée de Fourier de f^2.

d) Retrouver ce résultat par un calcul de résidu.

2) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ impaire. On pose $\Phi(t)=\int_t^{+\infty}\frac{\sin(2\pi u)}{u}\,\mathrm{d}u$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{\widehat{f}(x)}{x}\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}f(t)\,\Phi(t)\,\mathrm{d}t.$

b) En déduire que la fonction $g:x\mapsto\frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}$ appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})\cap\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

3) On sait qu'il existe $\varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{\varphi}\notin l^1(\mathbb{Z})$ (voir l'exercice 12.b de la feuille III). Quitte à ajouter une constante, on peut supposer que : $\varphi(\frac12)=\varphi(-\frac12)=0$.

a) Montrer que la fonction $f\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}\,\varphi(x) & \text{si } -\frac12<x<\frac12\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ appartient à $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$.

b) Prouver que $\widehat{f}\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi}\in c_0(\mathbb{Z})$ vérifient : $\int_{n-\frac12}^{n+\frac12}\widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t=\widehat{\varphi}(n)$ pour $n\in\mathbb{Z}$.

c) En déduire qu'il existe un élément de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ qui n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

4) a) Soit $f=\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}$. Calculer $\widehat{f}$.

b) En déduire les transformées de Fourier de :
$u:x\mapsto\frac{\sin(\pi x)}{x}$; $v:x\mapsto\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)^2$; $w:x\mapsto(1-|x|)_+$.

c) Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie presque partout par $g(x)=\arctan\frac1x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Calculer $\widehat{g}$.

d) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Définir l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

5) Soient $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $x_0\in\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) f a des limites finies $f(x_0^-)$ à gauche en x_0 et $f(x_0^+)$ à droite en x_0 ;

(ii) $h>0\mapsto\frac{f(x_0-h)-f(x_0^-)}{h}$ et $h>0\mapsto\frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ ont des limites finies en 0^+.

a) Démontrer, en utilisant le théorème de Fubini, que :
$$\int_{-A}^{A}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2i\pi x_0\xi}\,\mathrm{d}\xi = 2\int_0^{+\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\,\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } A>0.$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_{-A}^{A}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{2i\pi x_0\xi}\,\mathrm{d}\xi\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}.$

Indication : utiliser $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$ (cf. 4 (d)) et le théorème de Riemann-Lebesgue.

6) Soit $\varphi\in\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) En déduire que $\widehat{\varphi}$ ne peut appartenir elle aussi à $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, sauf si $\varphi=0$.

7) Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tel que $\|\varphi\|_2 = 1$. On pose : $\overline{x} = \int_{\mathbb{R}} x\,|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x$ et $\overline{\xi} = \int_{\mathbb{R}} \xi\,|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$, puis $\sigma_x = \big(\int_{\mathbb{R}}(x-\overline{x})^2\,|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x\big)^{1/2}$ et $\sigma_\xi = \big(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\overline{\xi})^2\,|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\big)^{1/2}$.

En mécanique quantique, $|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x$ est la loi de probabilité que suit l'abscisse x d'une particule et $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$ est la loi de probabilité que suit son impulsion p divisée par h.

a) Montrer que : $\big|\int_{\mathbb{R}} x\ \mathrm{Re}(\overline{\varphi(x)}\varphi'(x))\,\mathrm{d}x\big| \leq 2\pi\big(\int_{\mathbb{R}} x^2\,|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x\big)^{1/2}\big(\int_{\mathbb{R}} \xi^2\,|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\big)^{1/2}$.

b) En déduire que : $\sigma_x\,\sigma_\xi \geq \frac{1}{4\pi}$ « principe d'incertitude d'Heisenberg "$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$" ».
(Géométriquement : plus l'un des graphes de φ et $\widehat{\varphi}$ est concentré, plus l'autre est étalé.)

c) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

8) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $M_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big|x^2 f(x)\big| < +\infty$ et $M_1 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \big|x^2 f'(x)\big| < +\infty$.

Démontrer que : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ « formule sommatoire de Poisson ».

Indication : introduire $g\colon x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{T})$ et calculer sa transformée de Fourier.

9) Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tel que l'application $\psi\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x\,\varphi(x)\end{array}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

b) On suppose aussi que la transformée de Fourier $f := \widehat{\varphi}$ de φ est nulle sur $\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.
On introduit l'élément $g\colon x\in\mathbb{R} \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ qui prolonge $f|_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.
En appliquant une formule d'inversion de Fourier à φ puis à g, démontrer la relation
$$\varphi(x) \;=\; \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{x-n}\,\varphi(n) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \quad \text{« théorème de Shannon ».}$$

10) a) Appliquer la formule de Poisson à la fonction $f : x\in\mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\pi t x^2}$ $(t>0)$.

b) En déduire que la fonction $\theta : x>0 \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-n^2\pi x}$ vérifie : $\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\big(\frac{1}{x}\big)$ pour $x>0$.

11) On pose $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Calculer comme ci-dessus $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$ (cf. feuille III, exercice 2).

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+n)^2+1}$ comme une fraction rationnelle en $\cos(2\pi x)$.

12) On appelle filtre de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ une application linéaire <u>continue</u> $A : \mathscr{S}(\mathbb{R})\to\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui commute avec les translations $\tau_a : \varphi \mapsto (x\mapsto \varphi(x-a))$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.

On dit qu'un tel filtre est « réalisable » (ou « causal ») si :
$\forall t_0\in\mathbb{R}\quad \forall f_1,f_2\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\quad \big(\forall t<t_0\quad f_1(t)=f_2(t)\big) \Rightarrow \big(\forall t<t_0\quad (Af_1)(t)=(Af_2)(t)\big)$.

a) Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ tels que $\frac{P}{Q}$ est irréductible et sans pôle dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique filtre A tel que : $\forall f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\quad Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})\cdot A(f) = P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})\cdot f$.

b) On suppose dorénavant que $\deg\big(\frac{P}{Q}\big)\leq -1$. Construire à partir de la décomposition en éléments simple de $\frac{P}{Q}$ une fonction $h\in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \widehat{h}(x) = \frac{P}{Q}(2\pi\mathrm{i}x)$.
Indication : on calculera d'abord les transformées de Fourier de $f_+ : x\mapsto \mathrm{e}^{-ax}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $f_- : x\mapsto \mathrm{e}^{ax}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x)$, où $a\in\mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}\,a>0$.

c) En déduire que le filtre A est réalisable si et seulement si les pôles de $\frac{P}{Q}$ ont une partie réelle négative (ce qui équivaut à la condition « $h|_{]-\infty,0[}=0$ »).