Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$: à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

(a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose : $\mathcal{F}f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x}\, \mathrm{d}x$ et $\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi x}\, \mathrm{d}x$ $(\xi \in \mathbb{R})$.

La fonction $\mathcal{F}f$, notée aussi $\widehat{f}$, appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}) := \left\{ g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \mid g(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$.

(b) L'application linéaire $\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R})} : L^1(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est injective et $\underbrace{\text{continue}}_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \text{ est muni de } \| \, \|_\infty}$.

(c) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$f(x) = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(x)$ presque partout « théorème de réciprocité ».

Définition-Proposition

On prolonge $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$ à $L^2(\mathbb{R})$ (argument de densité) en une bijection linéaire

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{F}_{L^2(\mathbb{R})} : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \widehat{f} = \underbrace{\lim_{r \to +\infty}}_{(\text{dans } L^2(\mathbb{R}))} \Big(\xi \mapsto \int_{|x| \leq r} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x}\, \mathrm{d}x \Big) \end{array}$$

dont la réciproque est

$$\begin{array}{rrcl} \overline{\mathcal{F}}_{L^2(\mathbb{R})} : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \underbrace{\lim_{r \to +\infty}}_{(\text{dans } L^2(\mathbb{R}))} \Big(x \mapsto \int_{|\xi| \leq r} f(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \xi}\, \mathrm{d}\xi \Big) \end{array}$$

Elle vérifie : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big|\widehat{f}(\xi)\big|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ quand $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Remarque

On pose $\check{f}(x) = f(-x)$ et $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Les applications $f \to \check{f}$ et $f \to \tau_a(f)$ passent aux quotients modulo l'égalité presque partout.

(b) On a : $\mathcal{F}\check{f} = (\mathcal{F}f)\check{} = \overline{\mathcal{F}}f$ et $\widehat{\tau_a f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi a} \widehat{f}(\xi)$ quand $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

En particulier $\widehat{f}$ est paire (resp. impaire) lorsque f est paire (resp. impaire) avec $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

Définition-Proposition

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) On peut définir pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

(b) On a : $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|$.

(c) On a aussi $\boxed{\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}}$ quand $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

Il en résulte que le produit de convolution $*$ sur $L^1(\mathbb{R})$ est commutatif et associatif.

Proposition

Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. On sait que $f * g$ est définie (résumé sur les espaces L^p).

(a) Si f est continue, alors $f * g$ est continue.

(b) Si f est dérivable de dérivée bornée, alors $f * g$ est dérivable et $(f * g)' = f' * g$.

[Ces deux résultats sont des conséquences immédiates du théorème de convergence dominée.]

Proposition

(a) Si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$, et $f, f', ..., f^{(k)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\mathrm{i}\pi\xi)^k \widehat{f}(\xi) \ \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R} \ \text{ donc } \quad \widehat{f}(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{|\xi|^k}\Big)^{(*)}.$$

[Utiliser ce qui suit : si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f(x)$ a des limites quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$ (critère de Cauchy).]

En particulier : toute $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ est égale à $\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}$.

(b) Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, et $xf, ..., x^k f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})^{(**)}$, on a :

$$\widehat{f} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}) \quad \text{ et } \quad \widehat{f}^{(k)}(\xi) = \big((-2\mathrm{i}\pi x)^k f\big)\widehat{\ }(\xi).$$

Exemple

On a : $\mathcal{F}\,(x \mapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}) = (\xi \mapsto \mathrm{e}^{-\pi\xi^2})$.

En effet la fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ vérifie $(\star)$ $y' = -2\pi x y$, donc en appliquant la transformation de Fourier à chaque membre de $(\star)$, la fonction $\widehat{f}$ vérifie aussi $(\star)$ et a fortiori est multiple de f. On conclut en utilisant : $\widehat{f}(0) \overset{\text{Fubini}}{=} \big(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{polaires}}{=} \big(\int_0^{+\infty} 2\pi\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}\,r\,\mathrm{d}r\big)^{\frac{1}{2}} = 1$.

Définition-Proposition

(a) On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \ \big|\ \forall k, l \in \mathbb{N} \ \overbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|x^k f^{(l)}(x)\big|}^{\text{noté } \|x^k f^{(l)}\|_\infty} < +\infty \Big\} \subseteq \bigcap_{1 \le p \le +\infty} L^p(\mathbb{R})$.

complément

L'espace vectoriel $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de la distance $d(f,g) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}} 2^{-k-l} \min\big(\big\|x^k(f-g)^{(l)}\big\|_\infty, 1\big)$ est un espace métrique, appelé « espace de Schwartz ».

[Une suite $(f_n)_{n\ge0}$ d'éléments de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge vers $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si : $\|x^k(f_n - f)^{(l)}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}$.]

(b) L'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est un homéomorphisme.

(c) L'application bilinéaire $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ (f,g) & \mapsto & fg \end{array}$ est définie et continue.

Il en résulte que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par convolution.

complément

Proposition

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable.

On suppose que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, ou plus généralement que :

(i) les séries $\big(\sum f(x+n)\big)_{n\ge0}$ et $\big(\sum f(x-n)\big)_{n\ge0}$ $\underbrace{\text{convergent uniformément sur tout segment}}_{\text{par exemple } \sup_{x\in\mathbb{R}} |(x^2+1)f(x)| < +\infty}$;

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(n)\big| < +\infty$.

Alors : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ « formule sommatoire de Poisson ».

[Avec $\tau_{-x}f$ à la place de f, on trouve : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx} \underbrace{\widehat{f}(n)}_{\substack{n^{\text{e}} \text{ coefficient de Fourier de la fonction 1-périodique de } x \text{ qui apparaît à gauche}}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (résultat aussi issu de la démonstration).]

$(*)$ Comme $\widehat{f}$ est continue, on a donc sous les hypothèses du (a) : $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \big|(\xi^2+1)^{\frac{k}{2}}\widehat{f}(\xi)\big| < +\infty$.

$(**)$ Cette hypothèse du (b) signifie que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est mesurable et $\int_{\mathbb{R}} \big|(x^2+1)^{\frac{k}{2}} f(x)\big|\,\mathrm{d}x < +\infty$.