

Complément : phénomène de Gibbs

On considère la fonction 1-périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}] \end{cases} .$$

La suite $(S_n(f))_{n \geq 0}$ des sommes partielles de la série de Fourier de f vérifie :

$$(S_{2n-1}(f))(x) = (S_{2n}(f))(x) = \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} \widehat{f}(k) e^{2i\pi kx} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{2k-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$(S_{2n-1}(f))(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Mais la suite $(S_n(f))_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément, puisque :

$$S_{2n-1}(f)\left(\frac{1}{4n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du > \|f\|_\infty = 1.$$

Cela apparaît ci-dessous sur les tracés des graphes des applications $S_{2n-1}(f)$.

