# Complément : règles d'Abel (J-Y D)

## Lemme (« transformation d'Abel », immédiate et vue en TD)

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ des suites dans $\mathbb{C}$. Pour $p \leq q$ dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = -u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1}(u_n - u_{n+1})V_n + u_q V_q \quad \text{où} \quad V_n := \sum_{1\leq k\leq n} v_k \ \text{ pour } \ n \geq 0 \ \ (V_0 = 0).$$

## Proposition

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite dans un espace de Banach complexe $E$.
(Dans la pratique, $E$ sera : $\mathbb{C}$ ou $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ ou $\mathscr{C}(K,\mathbb{C})$ avec $K$ compact de $\mathbb{C}$.)

Si
- (i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left(\sum |u_{n+1}-u_n|\right)_{n\geq 1}$ converge
- (ii) la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geq 1}$ est bornée

alors la série $\left(\sum u_n v_n\right)_{n\geq 1}$ converge.

Par exemple : – (i) est vérifié quand $(u_n)_{n\geq 1}$ est réelle décroissante et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ;
– (ii) est vérifié quand $(v_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ « règle des séries alternées ».

Démonstration

Soient $p \leq q$ dans $\mathbb{N}$. D'après le lemme, on a : $\left\|\sum_{n=p}^{q} u_n v_n\right\| \leq \left(|u_p| + \sum_{n=p}^{q-1}|u_n - u_{n+1}| + |u_q|\right) \sup_{n\geq 1}\left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right|$.

L'hypothèse (i) et le critère de Cauchy assurent que : $|u_p| + \sum_{n=p}^{q-1}|u_n - u_{n+1}| + |u_q| \underset{p\leq q \text{ et } p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le critère de Cauchy (condition suffisante de convergence maintenant) permet d'en déduire que $\left(\sum u_n v_n\right)_{n\geq 1}$ converge. $\square$

## Lemme (« deuxième formule de la moyenne »)

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive décroissante et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable $(a < b)$.

Il existe $\xi \in [a,b]$ tel qu'on ait : $\displaystyle \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(a^+)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x.$

Démonstration

• On traite d'abord le cas où $f$ est de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{[a_{i-1},a_i[}$ avec $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ et $a = a_0 < \cdots < a_n = b$.
On introduit l'application continue $G : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $m = \min_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} G(x)$.
On utilise le premier lemme avec $V_i = G(a_i)$ : $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i+1})\,G(a_i) + \alpha_n\,G(a_n)$.
Il en résulte que $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \in [\alpha_1 m, \alpha_1 M]$ où $\alpha_1 = f(a_+)$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

• Dans le cas général, on a $0 \leq f(x) \leq f(a_+)$ quand $x \in\, ]a,b]$. On note $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite définie via les $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ par $f_n(x) = \frac{k+1}{n}\,f(a^+)$ si $\frac{k}{n} f(a^+) < f(x) \leq \frac{k+1}{n} f(a^+)$, $f_n(x) = 0$ si $f(x) = 0$ et $f_n(a) = f(a)$. Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{f(a^+)}{n}$.
Par le premier cas, il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ dans $[a,b]$ telle que : $\int_a^b f_n(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(a^+)\int_a^{\xi_n} g(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geq 0$.
On extrait de $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite $(\xi_{n_k})_{k\geq 0}$ convergente dans $[a,b]$, de limite $\xi$. Donc $\int_a^{\xi_{n_k}} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Par le théorème de convergence dominée, on a aussi $\int_a^b f_{n_k}(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$. D'où le résultat. $\square$

## Proposition (∗)

Soient $f, g : [a,b[\, \to \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Si
- (i) $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} 0$ et $f$ décroît
- (ii) $g \in \mathscr{L}^{1loc}([a,b[)$ et $x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$ converge.

Démonstration

Soient $a \leq \alpha \leq \beta < b$. D'après le lemme, on a : $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq f(\alpha^+)\sup_{\alpha\leq\xi\leq\beta}\left|\int_\alpha^\xi g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\,f(\alpha^+)\sup_{a\leq x<b}\left|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right|$.
Le membre de droite de cette inégalité pouvant être rendu arbitrairement petit en réalisant une condition de la forme $\alpha \geq A$, il résulte du critère de Cauchy que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ converge pour la borne $b$. $\square$

---

(∗) Quand $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ et $g$ est continue, cette proposition découlerait d'une intégration par parties.