Théorème de Fubini : à retenir (J-Y D)

On souhaite ici éviter ce problème : $\sum\limits_{x\in[0,1]} \big(\int_0^1 \mathbb{1}_{\{x=y\}}(y)\mathrm{d}y \big) = 0$ mais $\int_0^1 \big(\sum\limits_{x\in[0,1]} \mathbb{1}_{\{x=y\}}(y) \big)\mathrm{d}y = 1.$

Définition

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, c'est-à-dire un ensemble avec une tribu et une mesure positive. On dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *σ-fini* si X est union dénombrable de parties de mesure finie.

Définition-Proposition

Étant donnés deux espaces mesurés σ-finis $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, on note :

– $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la plus petite tribu sur $X \times Y$ qui contient les parties $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$;

– $\mu \otimes \nu$ l'unique mesure ≥ 0 sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$ pour $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

Théorème (« théorème de Fubini »)

On se donne des espaces mesurés σ-finis $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

(a) Pour toute application mesurable positive $f : X \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

les applications $\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} Y & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ y & \mapsto & \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$ sont mesurables,

et $\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \Big) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \Big) \mathrm{d}\nu(y) \ \leq +\infty}$.

(b) Pour toute application $\mu \otimes \nu$-intégrable $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, on a :

l'application $\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \end{array}$ est définie μ-presque partout et μ-intégrable,

l'application $\begin{array}{rcl} Y & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$ est définie ν-presque partout et ν-intégrable,

et $\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y) \Big) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x) \Big) \mathrm{d}\nu(y)}$.

(c) En particulier, pour tous $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $h \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on a :

$$\int_{X\times Y} g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) = \big(\int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \big) \big(\int_Y h(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \big).$$ (*)

(*) À partir des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{C}^X$ et $F = \mathbb{C}^Y$, une construction algébrique classique permet de construire un certain espace vectoriel quotient de $\mathbb{C}^{(E\times F)}$ noté $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ (appelé « produit tensoriel de E et F »), muni de la projection canonique de $E \times F$ dans $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ notée $(g,h) \mapsto g \otimes h$. On peut montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{C}^X \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^Y$ dans $\mathbb{C}^{X\times Y}$ qui envoie chaque $g \otimes h$ sur $(x,y) \mapsto g(x)h(y)$, et que cette application est injective. Par abus de notation, on notera : $(g \otimes h)(x,y) = g(x)\,h(y)$ pour $g : X \to \mathbb{C}$, $h : Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$ et $y \in Y$.

Complément : familles sommables (J-Y D)

Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\underbrace{(a_i)_{i\in I} \text{ une famille d'éléments de } E}_{\text{s'écrit : } (a_i)_{i\in I} \in E^I}$, $a \in E$.

Définition-Proposition

On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

(a) On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est *sommable* de somme a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathcal{P}_f(I) \quad \Big(J' \supseteq J \implies \Big\| \sum_{j'\in J'} a_{j'} - a \Big\| < \varepsilon \Big)$$

Dans ce cas, on note : $\sum_{i\in I} a_i = a$.

(b) On note $I' = \{ i \in I \mid a_i \neq 0 \}$. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si, soit I' est fini, soit I' est dénombrable et pour *toute* bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I'$ la série $\big(\sum a_{\varphi(n)} \big)_{n\geq 0}$ converge.
Dans ce cas, en supposant I' dénombrable, on a : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$ pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I'$.

(c) On suppose ici que E est complet. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall K \in \mathcal{P}_f(I \setminus J) \quad \Big\| \sum_{k\in K} a_k \Big\| < \varepsilon \qquad (\text{« critère de Cauchy »}).$$

En particulier, si $\underbrace{\text{la famille } (\|a_i\|)_{i\in I} \text{ est sommable dans } \mathbb{R}}_{\text{« } (a_i)_{i\in I} \text{ normalement sommable »}}$, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable dans E.

Proposition

(a) Une famille $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ est sommable si et seulement si $\sup\limits_{J\subseteq I,\, J \text{ fini}} \big(\sum_{j\in J} a_j \big) < +\infty$.
Dans ce cas, on a : $\sum_{i\in I} a_i = \sup\limits_{J\subseteq I,\, J \text{ fini}} \big(\sum_{j\in J} a_j \big)$. Dans le cas contraire, on pose : $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$.

(b) On note μ la mesure de comptage sur $(I, \mathcal{P}(I))$, définie par :

$$\mu(A) = \operatorname{Card} A \text{ si } A \subseteq I \text{ est fini}, \ \mu(A) = +\infty \text{ sinon.}$$

Une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si et seulement si elle est μ-intégrable.
Dans ce cas on a : $\sum_{i\in I} a_i = \int_I a_i \,\mathrm{d}\mu(i)$.

Ainsi une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si et seulement si elle est normalement sommable.

(c) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note :

$l^p(I) := L^p(I,\mu) = \big\{ (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sum_{i\in I} |a_i|^p < +\infty \big\}$ et $\|a\|_p = \big(\sum_{i\in I} |a_i|^p \big)^{1/p}$ si $a = (a_i)_{i\in I} \in l^p(I)$;

$l^\infty(I) := L^\infty(I,\mu) = \big\{ (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sup_{i\in I} |a_i| < +\infty \big\}$ et $\|a\|_\infty = \sup_{i\in I} |a_i|$ si $a = (a_i)_{i\in I} \in l^\infty(I)$.

Remarque

Étant donnée une famille $(a_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{C}$, il résulte de ce qui précède que

– si $I = \mathbb{N}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$;
$\underbrace{\text{dans ce cas}}_{\text{ou quand } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}}$: $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$;

– si $I = \mathbb{Z}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}| < +\infty$;
$\underbrace{\text{dans ce cas}}_{\text{ou quand } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}}$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ (le membre de droite de cette égalité sera noté $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$).