Université P. et M. Curie
Licence de Mathématiques
LM360 B

Jeudi 11 décembre 2008

Topologie et Calcul Différentiel
Corrigé de l'examen

Durée 3 h – sans document

I

1) C'est un résultat du cours que $\mathscr{C}^0(J)$ est complet pour la norme de la convergence uniforme.

Il est clair que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathscr{C}^1(J)$. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}^1(J)$, on a $\|f_n - f_p\|_0 \leqslant \|f_n - f_p\|_1$: il en résulte que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme, et converge uniformément sur J vers une fonction continue f. De plus, puisque $\|f'_n - f'_p\|_0 \leqslant \|f_n - f_p\|_1$, la suite des dérivées (f'_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme, et converge uniformément sur J vers une fonction continue g. Il résulte alors du théorème rappelé dans l'énoncé, que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$, et que $f' = g$, donc que f' se prolonge en une fonction continue sur J. Puisque (f_n) converge uniformément vers f et (f'_n) converge uniformément vers f', la suite (f_n) converge vezrs f dans $\mathscr{C}^1(J)$. Il en résulte que $\mathscr{C}^1(J)$ est un espace de Banach.

Enfin, puisque, pour $f \in \mathscr{C}^1(J)$, on a $|f(0)| \leqslant \|f\|_0 \leqslant \|f\|_1$, on voit que l'application $f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}^1(J)$, dont le noyau $\mathscr{C}^1_0(J)$ est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet.

2) *a)* On a, pour $f \in \mathscr{C}^1(J)$, $\|Df\|_0 = \|f'\|_0 \leqslant \|f\|_0 + \|f'\|_0 = \|f\|_1$.

b) Si $f \in \mathscr{C}^1_0(J)$ et $Df = 0$, la fonction f de dérivée nulle sur $]-1,1[$ est constante ; et comme elle s'annule en 0, elle est nulle. Il en résulte que le noyau de D est réduit à $\{0\}$, et que D est injective.

Inversement, si $g \in \mathscr{C}^0(J)$, elle possède une primitive f nulle en 0, qui est de classe $\mathscr{C}^1$. On voit alors que $f \in \mathscr{C}^1_0(J)$ et que $Df = g$. Donc D est surjective.

c) Il résulte de l'inégalité des accroissements finis que, si $f \in \mathscr{C}^1_0(J)$ et $t \in J$,

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant |t - 0| \sup_{s \in J} |f'(s)| \leqslant |t|\, \|f'\|_0 \leqslant \|f'\|_0 \ .$$

d) L'application linéaire D est continue d'après *a)* et bijective d'après *b)*. Enfin, si $g \in \mathscr{C}^0(J)$ et $f = D^{-1}g$, on a d'après *c)* : $\|f\|_0 \leqslant \|f'\|_0 = \|g\|_0$, donc

$$\left\|D^{-1}g\right\|_1 = \|f\|_1 = \|f\|_0 + \|g\|_0 \leqslant 2\,\|g\|_0$$

ce qui montre que D^{-1} est continue de norme au plus 2.

3) L'application D est linéaire continue, donc de classe $\mathscr{C}^1$ avec une différentielle constante égale à D. L'application $p : (g,h) \mapsto gh$ est bilinéaire de $\mathscr{C}^1(J) \times \mathscr{C}^1(J)$ dans $\mathscr{C}^0(J)$ et on a $\|gh\|_0 \leqslant \|g\|_0 . \|h\|_0 \leqslant \|g\|_1 . \|h\|_1$. Donc p est bilinéaire continue, et par suite de classe $\mathscr{C}^1$. Et on a, pour $(u,v) \in \mathscr{C}^1(J) \times \mathscr{C}^1(J)$: $p'(g,h).(u,v) = p(g,v) + p(u,h)$. Il en résulte que l'application $q : f \mapsto p(f,f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour $u \in \mathscr{C}^1(J)$, on a

$q'(f).u = 2fu$. On en conclut que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{C}^1(J)$ (et a fortiori sur $\mathscr{C}^1_0(J)$) et que $\Phi'(f).u = Du + 2fu$. En particulier , $\Phi'(0) = D$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^1_0(J)$ sur $\mathscr{C}^0(J)$.

4) Le théorème d'inversion locale, appliqué à Φ au voisinage de 0, donne l'existence d'un voisinage W de 0 dans $\mathscr{C}^1_0(J)$ dont l'image par Φ est un voisinage V de $\Phi(0) = 0$ dans $\mathscr{C}^0(J)$ tel que Φ soit un difféomorphisme de W sur V. En particulier, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset V$, et la restriction Ψ de Φ^{-1} à $B(0,r)$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$.

Alors, si $g \in \mathscr{C}^0(J)$ et $\|g\|_0 < r$, la fonction $f = \Psi(g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et vérifie $\Phi(f) = g$, c'est-à–dire $f' - f^2 = g$: il en résulte que f est solution nulle en 0 de l'équation différentielle $y' = y^2 + g$.

II

1) On a, pour $v \neq 0$, en posant $t = \dfrac{u}{v}$:

$$(u-v)^2 + v^2 - \frac{1}{4}(u^2+v^2) = \frac{1}{4}(3u^2 + 7v^2 - 8uv) = \frac{v^2}{4}(3t^2 - 8t + 7)$$

et puisque le discriminant $\Delta' = 4^2 - 3 \times 7 = -5 < 0$, le trinôme $3t^2 - 8t + 7$ est toujours positif. L'inégalité cherchée s'en déduit alors. Et pour $v = 0$, on a bien $u^2 \geqslant \dfrac{1}{4}u^2$.

2) *a)* On déduit de ce qui précède que $x^4 + 2y^4 - 2x^2y^2 = (x^2-y^2)^2 + (y^2)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}(x^4+y^4)$, donc que $f(x,y) \geqslant \dfrac{1}{4}(x^4+y^4) - x^2 - 2y^2 = \dfrac{1}{4}((x^2-2)^2 + (y^2-4)^2 - 20)$. Et cette dernière quantité tend vers $+\infty$ lorsque $|x| + |y|$ tend vers l'infini.

b) D'après *a)*, il existe $R > 0$ tel que $f(x,y) > 0$ si $|x| + |y| > R$. Il en résulte que l'ensemble $K = \{(x,y) : f(x,y) \leqslant 0\}$ est contenu dans $[-R,R] \times [-R,R]$, donc est borné. Et comme la fonction polynômiale f est continue, $K = f^{-1}(]-\infty, 0])$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Donc K est compact.

c) La fonction continue f atteint son minimum sur K en un point (x_0, y_0). Puisque $(0,0) \in K$, on a $f(x_0,y_0) \leqslant f(0,0) = 0$.

Et pour tout point $(x,y) \notin K$, on a $f(x,y) > 0 \geqslant f(x_0,y_0)$, ce qui montre que f atteint en (x_0,y_0) son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

3) *a)* Les points critiques de f sont les points où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent simultanément. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2 - 2x = 2x(2x^2 - 2y^2 - 1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 4x^2y - 4y = -4y(x^2 - 2y^2 + 1) \end{cases}$$

On a donc, pour un point critique (x,y) : — soit $x = y = 0$ — soit $x = 0$ et $2y^2 = 1$ — soit $y = 0$ et $2x^2 = 1$ — soit $2x^2 - 2y^2 = 1$ et $x^2 - 2y^2 = -1$, c'est-à-dire $x^2 = 2$ et $y^2 = \dfrac{3}{2}$. Il y a donc 9 points critiques : $M_0 = (0,0)$, $M_1 = (0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $M_2 = (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$;

$M_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $M_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $M_5 = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$, $M_6 = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$, $M_7 = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$ et $M_8 = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$.

b) On a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^2 - 2$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -8xy$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y^2 - 4x^2 - 4$

Et la matrice hessienne de f en (x, y) est $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

Donc $H_f(M_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $H_f(M_1) = H_f(M_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$H_f(M_3) = H_f(M_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $H_f(M_5) = H_f(M_8) = \begin{pmatrix} 16 & -8\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix}$,

$H_f(M_6) = H_f(M_7) = \begin{pmatrix} 16 & 8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix}$.

c) La matrice $H_f(M_0)$ est clairement définie négative, et f admet un maximum local en M_0. Les matrices $H_f(M_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ ont une valeur propre positive et une négative, donc ne sont ni positives ni négatives et ces points sont des cols.

Enfin, pour $5 \leqslant i \leqslant 8$, on a $r > 0$, $t > 0$ et $rt - s^2 = 16 \times 24 - 3 \times 64 = 192 > 0$. La matrice hessienne en ces points est donc définie positive, et f y admet des minimums locaux. Et on a $f(M_i) = 2^2 + 2\frac{9}{4} - 2.2\frac{3}{2} - 2 - 2\frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$.

Le minimum global de f est minimum local : c'est donc $-\frac{5}{2}$, atteint en les quatre points M_i pour $5 \leqslant i \leqslant 8$.

III

1) $d(u, v, w)^2$ est le minimum de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$ sur $\mathscr{P}$, c'est-à-dire avec la condition $\varphi(x, y, z) := x + y + z - h = 0$. La fonction φ n'a pas de point critique : ce minimum est donc atteint en un point (x, y, z) pour lequel existe un multiplicateur de Lagrange λ tel que

$$\begin{cases} 2(x-u) = \lambda.1 \\ 2(y-v) = \lambda.1 \\ 2(z-w) = \lambda.1 \\ x + y + z - h = 0 \end{cases}$$

d'où $h = x + y + z = u + v + w + 3\frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{2}{3}(h - u - v - w)$ et le minimum vaut $d(u, v, w)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = 3\frac{\lambda^2}{4} = \frac{1}{3}(h - u - v - w)^2$. On en conclut que $d(u, v, w) = \frac{|h - u - v - w|}{\sqrt{3}}$.

2) La distance δ entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$ est égale au minimum sur $\mathscr{E}$ de $d(u, v, w)$, c'est-à-dire que δ^2 est le minimum de la fonction $g : (u, v, w) \mapsto \frac{1}{3}(h - u - v - w)^2$ sur $\mathscr{E}$, c'est-à-dire avec

la condition $\psi(u,v,w) := \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} + \dfrac{w^2}{c^2} - 1 = 0$. La fonction ψ n'a d'autre point critique que l'origine, qui n'est pas dans $\mathscr{E}$. Le minimum est donc atteint en un point (u,v,w) pour lequel existe un multiplicateur de Lagrange μ vérifiant :

$$\begin{cases} 2(u+v+w-h) = \dfrac{2\mu u}{a^2} \\ 2(u+v+w-h) = \dfrac{2\mu v}{b^2} \\ 2(u+v+w-h) = \dfrac{2\mu w}{c^2} \\ \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} + \dfrac{w^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Alors

- ou bien $\mu = 0$ et le point (u,v,w) de $\mathscr{E}$ vérifie $u+v+w = h$, c'est-à-dire appartient à $\mathscr{P}$: $\mathscr{P} \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$ et $\delta = 0$. On a alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$h = u+v+w = a.\frac{u}{a} + b.\frac{v}{b} + c.\frac{w}{c} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

- ou bien on a $\nu := \dfrac{u}{a^2} = \dfrac{v}{b^2} = \dfrac{w}{c^2} = \dfrac{u+v+w-h}{\mu}$, donc $\dfrac{a^4\nu^2}{a^2} + \dfrac{b^4\nu^2}{b^2} + \dfrac{c^4\nu^2}{c^2} = 1$ et $\nu^2 = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$. On a alors, pour $\varepsilon = \pm 1$, $u = \dfrac{\varepsilon a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $v = \dfrac{\varepsilon b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ et $w = \dfrac{\varepsilon c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. On trouve dans ce cas : $\delta^2 = \dfrac{1}{3}(h - \varepsilon\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2$. Cette quantité est inférieure si $\varepsilon = -1$, ce qui entraîne finalement

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(h - \sqrt{a^2+b^2+c^2}) \ .$$