Université P. et M. Curie
Master de Mathématiques
MM003

Lundi 27 Mai 2013

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen

I

1) Puisque la suite (x_n) converge faiblement, elle est bornée (théorème de Banach-Steinhaus) et $M = \sup_n \|x_n\| < +\infty$. On pose $n_0 = 0$. Si n_k est déterminé, on a par définition de la convergence faible, $\lim_{n\to\infty} |\langle x_p, x_n\rangle| = 0$ pour tout p. Il existe donc un $N > n_k$ tel que $|\langle x_p, x_n\rangle| \leqslant 2^{-k-1}$ pour tout $p \leqslant n_k$ chaque fois que $n \geqslant N$. Il suffit alors de prendre $n_{k+1} = N$.

2) On a alors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{m} x_{n_k}\right\|^2 &= \langle \sum_{k=0}^{m} x_{n_k}, \sum_{k=0}^{m} x_{n_k}\rangle = \left|\sum_{p,k\leqslant m} \langle x_{n_p}, x_{n_k}\rangle\right| \leqslant \sum_{p,k\leqslant m} \left|\langle x_{n_p}, x_{n_k}\rangle\right| \\ &= \sum_{p=0}^{m} \left\|x_{n_p}\right\|^2 + \sum_{p\neq k} \left|\langle x_{n_p}, x_{n_k}\rangle\right| = \sum_{p=0}^{m} \left\|x_{n_p}\right\|^2 + 2.\sum_{0\leqslant p<k\leqslant m} \left|\langle x_{n_p}, x_{n_k}\rangle\right| \\ &\leqslant (m+1)M^2 + 2.\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{k=p+1}^{m} 2^{-k} \leqslant (m+1)M^2 + 2.\sum_{p=0}^{m-1} 2^{-p} \leqslant (m+1)M^2 + 4\end{aligned}$$

3) Alors

$$\|y_m\|^2 = \frac{1}{(m+1)^2}\left\|\sum_{k=0}^{m} x_{n_k}\right\|^2 \leqslant \frac{(m+1)M^2+4}{(m+1)^2} = \frac{M^2}{m+1} + \frac{4}{(m+1)^2} \to 0$$

lorsque m tend vers l'infini : la suite (y_m) converge donc vers 0 dans H.

4) L'ensemble $\overline{C}$ est un convexe fermé de E. Si $0 \notin \overline{C}$, il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existerait une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ telle que

$$0 = \varphi(0) < \delta = \inf_{y\in\bar{C}} \varphi(y)$$

On devrait donc avoir, pour tout n, $|\varphi(x_n)| \geqslant \varphi(x_n) \geqslant \delta > 0$ puisque $x_n \in C$, ce qui contredit la convergence faible de (x_n) vers 0, car l'on devrait avoir alors $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$.

Il en résulte que $0 \in \overline{C}$, c'est-à-dire que, pour tout k, la boule $B(0, 2^{-k})$ rencontre C en un point z_k. Par définition de C, le point z_k est combinaison convexe d'un nombre fini de points de la suite (x_n) : il existe donc un entier n_k, qu'on peut supposer strictement supérieur à n_{k-1} si celui-ci est déjà déterminé, et des coefficients réels positifs $(\lambda_{k,p})_{p\leqslant n_k}$ tels que

$$z_k = \sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p}\, x_p \qquad \text{et} \qquad 1 = \sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p}$$

La suite strictement croissante (n_k) tend vers l'infini. Alors, si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver k tel que $2^{-k} < \varepsilon$. Et si $m \geqslant n_k$, il existe un plus grand entier j tel que $n_j \leqslant m$: on doit donc avoir $j \geqslant k$, $n_{j+1} > m$, et $y_m = z_j$. Donc $\|y_m\| = \|z_j\| \leqslant 2^{-j} \leqslant 2^{-k} < \varepsilon$, ce qui prouve la convergence vers 0 de la suite (y_m). Et on a clairement $y_m \in \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

II

On a clairement $H^0(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\} = L^2(\mathbb{R}^d)$ en vertu du théorème de Plancherel. De plus, puisque pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\displaystyle\int \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = (2\pi)^d \int |f(x)|^2 \, dx$, on a $\|f\|_{H^0} = \|f\|_2$.

1) Si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, la fonction f est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est donc bien définie dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^s . \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = (2\pi)^{-d} . J_s(f) = \|f\|_{H^s}^2 < +\infty$$

ce qui montre que $Tf \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|Tf\|_2 = \|f\|_{H^s}$. Donc T est isométrique.

Inversement, si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la fonction $g_1 : \xi \mapsto (2\pi)^{d/2} \dfrac{g(\xi)}{(1 + \|\xi\|^2)^{s/2}}$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ puisque $|g_1(\xi)| \leqslant (2\pi)^{d/2} |g(\xi)|$. C'est donc la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Et on a clairement alors $J_s(f) < +\infty$, c'est-à-dire $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $Tf = g$. Donc T est surjectif.

Puisque $H^s(\mathbb{R}^d)$ est isométrique à l'espace complet $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est complet lui aussi.

2) On sait que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut donc trouver $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|Tf - \varphi_n\|_2 \leqslant 2^{-n}$. Alors la fonction $\psi_n : \xi \mapsto (2\pi)^{d/2}(1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} . \varphi_n$ est $\mathscr{C}^\infty$ et son support est contenu dans celui de φ_n. Il en résulte que $\psi_n \in \mathscr{D}(R^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, il existe $g_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g_n} = \psi_n$. On a alors $Tg_n = \varphi_n$, donc $\|f - g_n\|_{H^s} = \|Tf - Tg_n\|_2 = \|Tf - \varphi_n\|_2 \leqslant 2^{-n}$, ce qui montre que f est, dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, la limite de la suite (g_n) de fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

III

1) Puisque $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a aussi $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc φ et $\hat{\varphi}$ sont intégrables. La formule d'inversion de Fourier donne donc :

$$\begin{aligned}\varphi(y,t) &= (2\pi)^{-d} \, \overline{\mathscr{F}}(\hat{\varphi})(y,t) = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\xi,\tau) \mathrm{e}^{i(\langle y,\xi\rangle + t\tau)} \, d\xi \, d\tau \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,\tau) \mathrm{e}^{-\langle y,\xi\rangle} \mathrm{e}^{it\tau} \, d\tau\end{aligned}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient

$$\psi(y) = \varphi(y,0) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{e}^{i\langle y,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,\tau) \, d\tau \ .$$

2) La fonction $\hat{\varphi}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$; il en résulte qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et tout entier q la fonction $(\xi,\tau) \mapsto (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2)\partial_\alpha \hat{\varphi}(\xi,\tau)$ est bornée sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout ξ la fonction $h_\xi : \tau \mapsto \hat{\varphi}(\xi,\tau)$ est $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout n et tout q, la fonction $\tau \mapsto (1 + \tau^2)^q \dfrac{d^n}{d\tau^n} h_\xi(\tau)$ est bornée, c'est-à-dire que $h_\xi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et en particulier est intégrable. Donc $g(\xi)$ est définie pour tout ξ. De plus, d'après Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |g(\xi)| \, d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi,\tau)| \, d\tau \Big) d\xi = \iint |\hat{\varphi}(\xi,\tau)| \, d\tau \, d\xi < +\infty$$

puisque $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Il en résulte que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{d-1}$. D'après la question précédente, on a

$$\psi(y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(y) \, \mathrm{e}^{i\langle y,\xi\rangle} \, d\xi = (2\pi)^{-d} \, \overline{\mathscr{F}} g(y)$$

Puisque $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \subset L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ et que $g \in L^1(\mathbb{R}^{d-1})$, la formule d'inversion de Fourier (en dimension $d-1$ cette fois-ci) donne $\hat{\psi} = (2\pi)^{d-1}\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}((2\pi)^{-d}g) = (2\pi)^{-1}g$.

3) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée, pour ξ fixé, à $(1+\|\xi\|^2+\tau^2)^{1/2}.\hat{\varphi}(\xi,\tau)$ et à $(1+\|\xi\|^2+\tau^2)^{-1/2}$ donne

$$|g(\xi)|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi,\tau)\,d\tau\right|^2 \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}}(1+\|\xi\|^2+\tau^2)\,|\hat{\varphi}(\xi,\tau)|^2\,d\tau\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{d\tau}{1+\|\xi\|^2+\tau^2}\Big)$$

Alors, par le changement de variable $u = \dfrac{\tau}{(1+\|\xi\|^2)^{1/2}}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\tau}{1+\|\xi\|^2+\tau^2} = \frac{1}{(1+\|\xi\|^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{(1+\|\xi\|^2)^{1/2}}$$

donc $|g(\xi)|^2 \leqslant \dfrac{\pi}{(1+\|\xi\|^2)^{1/2}}.\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1+\|\xi\|^2+\tau^2)\,|\hat{\varphi}(\xi,\tau)|^2\,d\tau$. Alors, en intégrant par rapport à ξ : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}}(1+\|\xi\|^2)^{1/2}\,|g(\xi)|^2 \leqslant \pi\int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}}(1+\|\xi\|^2+\tau^2)\,|\hat{\varphi}(\xi,\tau)|^2\,d\xi\,d\tau$, et

$$\begin{aligned}(2\pi)^{d-1}\,\|\psi\|^2_{H^{1/2}} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}(1+\|\xi\|^2)^{1/2}\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}(1+\|\xi\|^2)^{1/2}\,|g(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leqslant \frac{\pi}{4\pi^2}\int(1+\|\xi\|^2+\tau^2)\,|\hat{\varphi}(\xi,\tau)|^2\,d\xi\,d\tau = \frac{1}{4\pi}(2\pi)^d\,\|\varphi\|^2_{H1}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|\psi\|_{H^{1/2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\|\varphi\|_{H1}$.

4) L'application linéaire γ est donc continue de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|.\|_{H^1}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ muni de la norme $\|.\|_{H^{1/2}}$; puisque $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ et $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ complet, γ se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$.

IV

1) Le changement de variables $x = z-h$, $y = z+h$ a un déterminant jacobien égal à $(-2)^d$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}K_s(f) &= \int\frac{|f(y)-f(x)|^2}{\|y-x\|^{d+2s}}\,dx\,dy = 2^d\int\frac{|f(z+h)-f(z-h)|^2}{\|2h\|^{d+2s}}\,dz\,dh\\ &= 2^{-2s}\int\frac{|f(z+h)-f(z-h)|^2}{\|h\|^{d+2s}}\,dz\,dh\end{aligned}$$

Puisque f est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il en est de même, pour h fixé, des fonctions $\tau_h f : z \mapsto f(z+h)$ et $\tau_{-h}f : z \mapsto f(z-h)$, ainsi que de leur différence $\Delta_h f$.

Par la formule de Plancherel-Parseval, on a, pour h fixé dans $\mathbb{R}^d$:

$$(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_h f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\widehat{\Delta_h f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

Pour une fonction $\varphi \in L^1 \cap L^2$, on a pour tout ξ

$$\widehat{\tau_h\varphi}(\xi) = \int\varphi(x+h)\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx = \int\varphi(y)\mathrm{e}^{-i\langle y-h,\xi\rangle}\,dy = \mathrm{e}^{i\langle h,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)$$

L'ensemble E des φ de L^2 vérifiant l'égalité $\widehat{\tau_h\varphi} = \mathrm{e}^{i\langle h,\cdot\rangle}\hat{\varphi}$ est fermé car les fonctions $\varphi \mapsto \tau_h\varphi$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ et $\varphi \mapsto \mathrm{e}^{i\langle\cdot,\xi\rangle}.\varphi$ sont toutes trois continues de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Et puisqu'il contient le sous-espace $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2, E est égal à L^2. On a donc $\widehat{\Delta_h f}(\xi) = \hat{f}(\xi)(\mathrm{e}^{i\langle h,\xi\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle h,\xi\rangle}) = 2i\sin\langle h,\xi\rangle.\hat{f}(\xi)$, et par suite

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_h f(x)|^2 \, dx = 4\int \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \sin^2\langle h,\xi\rangle \, d\xi$$

2) En passant en coordonnées polaires : $h = \rho.\omega$, on a

$$\int \frac{\sin^2\langle h,\xi\rangle}{\|h\|^{d+2s}}\, dh = \int \frac{\sin^2\langle \rho.\omega,\xi\rangle}{\rho^{d+2s}}\, \rho^{d-1}\, d\sigma(\omega) = \int_0^\infty \rho^{-1-2s}\, d\rho \int_\Sigma \sin^2(\rho\langle\xi,\omega\rangle)\, d\sigma(\omega)$$

Si u et v sont deux éléments de Σ, il existe une rotation R de $\mathbb{R}^d$ qui transforme u en v. Puisque $\langle Ru, R\omega\rangle = \langle u,\omega\rangle$, on a par invariance par R de la mesure σ

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sin^2(r\langle v,\omega\rangle)\, d\sigma(\omega) &= \int_\Sigma \sin^2(r\langle R(u),\omega\rangle)\, d\sigma(\omega) = \int_\Sigma \sin^2(r\langle R(u),R(\omega)\rangle)\, d\sigma(\omega)\\ &= \int_\sigma \sin^2(r\langle u,\omega\rangle)\, d\sigma(\omega)\end{aligned}$$

ce qui montre que la quantité $c(r) = \displaystyle\int_\sigma \sin^2(r\langle u,\omega\rangle)\, d\sigma(\omega)$ est indépendante de $u \in \Sigma$. De plus, pour tout réel t, on a $0 \leqslant \sin^2 t \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin^2 t \leqslant t^2$ d'où les inégalités $0 \leqslant c(r) \leqslant \displaystyle\int_\Sigma d\sigma(\omega) = \sigma(\Sigma)$ et $0 \leqslant c(r) \leqslant \displaystyle\int_\Sigma r^2(\langle u,\omega\rangle)^2\, d\sigma(\omega) \leqslant \int_\Sigma r^2\, d\sigma(\omega) = r^2\sigma(\Sigma)$, puisque $|\langle u,\omega\rangle| \leqslant \|u\|\,.\,\|\omega\| = 1$.

3) Pour $\xi \neq 0$, on a donc, avec $u = \dfrac{\xi}{\|\xi\|} \in \Sigma$, $\rho.\langle\xi,\omega\rangle = \rho.\|\xi\|.\langle u,\omega\rangle$ et, avec le changement de variable $r = \rho.\|\xi\|$,

$$\int \frac{\sin^2\langle h,\xi\rangle}{\|h\|^{d+2s}}\, dh = \int_0^\infty \rho^{-1-2s} c(\rho\|\xi\|)\, d\rho = \int_0^\infty r^{-1-2s}\|\xi\|^{2s+1} c(r)\frac{dr}{\|\xi\|} = \|\xi\|^{2s}\int_0^\infty r^{-1-2s}c(r)\, dr$$

En majorant $c(r)$ par $r^2\sigma(\Sigma)$ si $r \leqslant 1$ et par $\sigma(\Sigma)$ pour $r \geqslant 1$, on trouve

$$\int_0^\infty r^{-1-2s}c(r)\, dr \leqslant \sigma(\Sigma)\Big(\int_0^1 r^{1-2s}\, dr + \int_1^\infty r^{-1-2s}\, dr\Big) = \sigma(\Sigma)\Big(\frac{1}{2-2s}+\frac{1}{2s}\Big) = \frac{\sigma(\Sigma)}{2s(1-s)} < +\infty$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}K_s(f) &= 2^{-2s}\int \frac{dh}{\|h\|^{d+2s}}\int |\Delta_h f(z)|^2\, dz = 2^{2-2s}(2\pi)^{-d}\int \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \int \frac{\sin^2\langle h,\xi\rangle}{\|h\|^{d+2s}}\, dh\\ &= 2^{2-2s}(2\pi)^{-d}\int_0^\infty r^{-1-2s}c(r)\, dr.\int_{\mathbb{R}^d}\|\xi\|^{2s}.\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = C(s)\int \|\xi\|^{2s}.\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &\leqslant C(s)\int (1+\|\xi\|^2)^s.\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = C(s).J_s(f)\end{aligned}$$

Et ceci montre que si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $K_s(f) < +\infty$.

4) Pour tout réel $t \geqslant 0$ et $s \in]0,1[$, on a $(1+t)^s \leqslant 1 + t^s$, car la dérivée de $t \mapsto 1 + t^s - (1+t)^s$ est $s(t^{s-1} - (1+t)^{s-1}) \geqslant 0$. On en déduit que $(1+\|\xi\|^2)^s \leqslant 1 + \|\xi\|^{2s}$, donc que

$$J_s(f) \leqslant \int \|\xi\|^{2s}.\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi + \int \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{K_s(f)}{C(s)} + (2\pi)^d\|f\|_2^2$$

Il en résulte que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $K_s(f) < +\infty$, alors $J_s(f) < +\infty$, c'est-à-dire $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$.