Université P. et M. Curie
Licence de Mathématiques
Filière B

Jeudi 11 Juin 1998

Examen de Topologie

Durée 4 heures – sans document

I

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\, dt = 1$.

1) Soient $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer, au moyen du changement de variable $t = \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{u}{\sqrt{\alpha}}$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi\alpha t^2 + 2\pi t x}\, dt$$

On admettra que la fonction $\varphi : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi\alpha t^2 + 2\pi t z}\, dt$ est entière.

2) Montrer que la fonction : $z \mapsto \varphi(z) - \alpha^{-1/2}\mathrm{e}^{\pi z^2/\alpha}$ est une fonction entière nulle sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \alpha^{-1/2}\mathrm{e}^{\pi z^2/\alpha}$$

II

Soit p un entier impair. On se propose de calculer la somme

$$\gamma_p = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{e}^{2i\pi q^2/p}$$

1) Calculer γ_3.

2) On considère la fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{2i\pi z^2/p}}{\mathrm{e}^{2i\pi z} - 1}$$

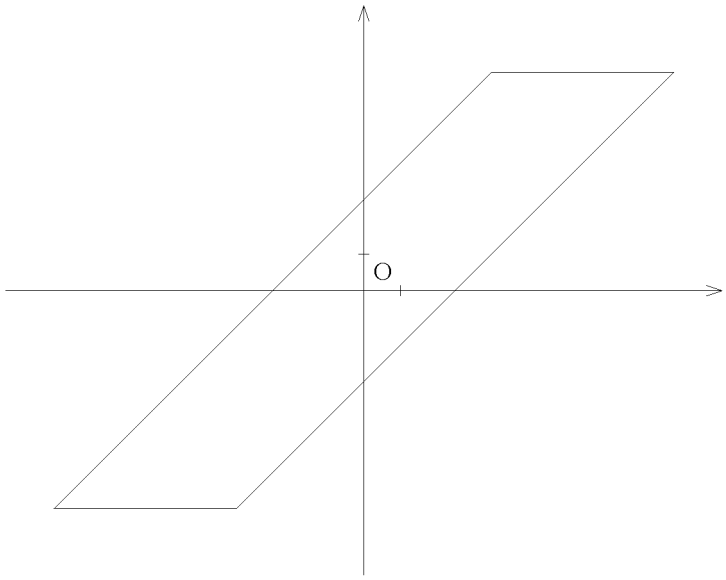
Déterminer les pôles de f et calculer le résidu $Res(f, a)$ de f en chaque pôle a. Montrer que $Res(f, a + p) = Res(f, a)$.

3) Pour θ réel positif on désigne par $\mathscr{P}_\theta$ le parallélogramme de sommets $p/2 - (1+i)\theta$, $p/2 + (1+i)\theta$, $-p/2 - (1+i)\theta$ et $-p/2 - (1+i)\theta$.

Au moyen de la formule des résidus, montrer que $\gamma_p = \int_{\partial\mathscr{P}_\theta} f(z)\, dz$.

4) On considère les intégrales

$$I_1 = \int_{-p/2}^{p/2} f(t + (1+i)\theta)\, dt \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{-p/2}^{p/2} f(t - (1+i)\theta)\, dt$$



Montrer que

$$|I_1| \leq p\mathrm{e}^{-4\pi\theta^2/p}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\theta}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\theta}} \qquad \text{et} \qquad |I_2| \leq p\mathrm{e}^{-4\pi\theta^2/p}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\theta}}{\mathrm{e}^{2\pi\theta}-1}$$

et en déduire que

$$\lim_{\theta\to+\infty} I_1 = \lim_{\theta\to+\infty} I_2 = 0$$

5) Montrer que

$$f(z+p/2) - f(z-p/2) = i^p.\mathrm{e}^{2i\pi z^2/p}.\frac{\mathrm{e}^{2i\pi z}-\mathrm{e}^{-2i\pi z}}{-\mathrm{e}^{2i\pi z}-1} = i^p.\mathrm{e}^{2i\pi z^2/p}.\left(\mathrm{e}^{-2i\pi z}-1\right)$$

6) Montrer que

$$\int_{\partial\mathscr{P}_\theta} f(z)\,dz = I_2 - I_1 + (1+i)\int_{-\theta}^{+\theta}\Big(f((1+i)t+p/2) - f((1+i)t-p/2)\Big)\,dt$$

et en déduire que

$$\gamma_p = (1+i)i^p\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4\pi t^2/p}\left(\mathrm{e}^{-2i\pi(1+i)t}-1\right)\,dt$$

Calculer γ_p (utiliser **I**).

7) Déduire de ce qui précède que γ_p est réel si p est congru à 1 modulo 4, et imaginaire pur si p est congru à -1 modulo 4.

III

Soit E un espace de Hilbert. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des opérateurs hermitiens sur E, c'est-à-dire des opérateurs $A \in \mathscr{L}(E)$ tels que $A = A^*$. Un opérateur hermitien A est dit positif, et on note $A \geq 0$, si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$.

1) Montrer que pour $B \in \mathscr{H}$, on a $\langle B^2x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle$ et en déduire que $B^2 \geq 0$.

Soit $A \in \mathscr{H}$. Montrer que $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$ et en déduire que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Montrer que $\langle Ax, x\rangle \leq \|A\| \langle x, x\rangle$ et en déduire que $a.I - A \geq 0$, où $a = \|A\|$ et où I désigne l'opérateur identité : $x \mapsto x$.

On suppose désormais que $A \geq 0$ et que $a = \|A\|$.

2) Si A et B sont hermitiens et commutent ($AB = BA$), montrer que AB est hermitien, et en déduire que A^n est hermitien pour tout entier n.

3) On pose $B = I - \dfrac{1}{a}A$. Montrer que B est hermitien positif et que $\langle Bx, x\rangle \leq \|x\|^2$ pour tout x de E.

Pour x et y dans E, montrer que

$$0 \leq \langle B(x-y), x-y\rangle = \langle Bx, x\rangle + \langle By, y\rangle - 2\,\Re e\big(\langle Bx, y\rangle\big) \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\,\Re e\big(\langle Bx, y\rangle\big)$$

et en déduire, avec $y = Bx$, que $\|Bx\| \leq \|x\|$, puis que $\|B\| \leq 1$.

4) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe φ définie sur $\{z : \Re e\, z < 1\}$, valant 1 en 0, et telle que $\varphi(z)^2 = 1 - z$, puis qu'il existe une suite (α_k) telle que pour $|z| < 1$ on ait :

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

Calculer les dérivées successives en 0 de la fonction : $t \mapsto (1-t)^{1/2}$, et en déduire que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1/2$ et

$$\alpha_k = -\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k.k!} \qquad \text{pour } k \geq 2$$

Montrer que pour $0 < t < 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|\, t^k = 1 - \sqrt{1-t} < 1$, et en déduire que, pour tout entier p, on a $\sum_{k=1}^{p} |\alpha_k| \leq 1/t^p$, puis que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \leq 1$.

On notera $\beta_p = \sum_{j+k=p} \alpha_j \alpha_k$. Montrer que pour $|z| < 1$, on a

$$1 - z = \varphi(z) \times \varphi(z) = \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k z^{j+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p z^p$$

et en déduire que

$$\beta_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ -1 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

5) Montrer que la série de terme général $(\alpha_k B^k)$ est normalement convergente dans $\mathscr{L}(E)$, puis que sa somme S vérifie

$$S^2 = \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k B^{j+k} = I - B = \frac{1}{a}A$$

et enfin que A est le carré d'un opérateur hermitien.