Université P. et M. Curie
Licence de Mathématiques
Filière B

Mardi 4 septembre 2001

Topologie, Calcul Différentiel, Variable Complexe

Durée 4 heures – sans document

I

1) Soit $\alpha = a + ib$ un nombre complexe tel que $-1 < a < 1$. Montrer que l'intégrale

$$J_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\operatorname{ch} x}\, dx$$

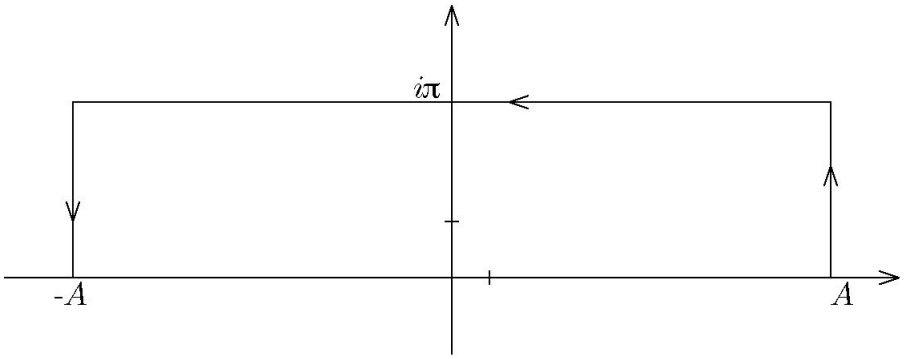
est absolument convergente.

2) Déterminer les pôles de la fonction méromorphe f_α définie par

$$f_\alpha(z) = 2\frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}$$

et les résidus de f_α en chacun de ses pôles.

3)



Soient $A > 0$ et R le rectangle de sommets A, $A + i\pi$, $-A + i\pi$ et $-A$. Calculer

$$\int_{\partial R} f_\alpha(z)\, dz$$

4) Montrer que si $|\Re e\, z| = A$ et $|\Im m\, z| \leq \pi$, on a

$$|f_\alpha(z)| \leq \frac{\mathrm{e}^{\pi|b| + A|a|}}{\operatorname{sh} A} \leq 2\mathrm{e}^{\pi|b|}\frac{\mathrm{e}^{-(1-|a|)A}}{1 - \mathrm{e}^{-2A}}$$

5) Déduire de ce qui précède la valeur de J_α.

II

Soit J l'intervalle réel compact $[0,1]$. On veut montrer que si (F_n) est une suite de fermés de J deux-à-deux disjoints et de réunion J, alors l'un d'entre eux est égal à J (et les autres sont vides).

On suppose, par contradiction, que $F_0 \neq \emptyset$ et $F_p \neq \emptyset$ pour un $p \geq 1$.

1) Montrer que s'il existe un entier m tel que les F_n soient tous vides pour $n > m$, alors

$$J \setminus F_0 = \bigcup_{1 \leq n \leq m} F_n$$

est fermé, et que ceci contredit la connexité de J. En déduire qu'il existe une infinité de F_n non vides.

2) Soit J' un sous-intervalle fermé de J. On suppose $J' \cap F_k \neq \emptyset$ et $J' \cap F_\ell \neq \emptyset$ pour un $\ell > k$. Montrer que le fermé $J' \cap F_\ell$ de J' n'est pas ouvert dans J', et en déduire qu'il existe un point $v \in J' \cap F_\ell$ dont $J' \cap F_\ell$ n'est pas un voisinage dans J', puis qu'il existe $r > 0$ tel que $J'' = J' \cap [v - r, v + r]$ vérifie $J'' \cap F_k = \emptyset$ et que $J'' \cap F_n \neq \emptyset$ pour un entier $n \neq \ell$.

Montrer comme à la question précédente, que J'' rencontre une infinité de F_n.

3) Montrer qu'on peut, au moyen de ce qui précède, construire par récurrence une suite décroissante J_k d'intervalles compacts telle que

$$J_0 = J$$
$$J_{k+1} \cap F_k = \emptyset$$
$$J_{k+1} \text{ rencontre une infinité de } F_n$$

4) Montrer que l'intersection des J_k n'est pas vide, et que si $v \in \bigcap_k J_k$, on a $v \notin \bigcup_n F_n$. Remarquer que ceci est une contradiction et conclure.

5) Soient V un espace vectoriel normé et (H_n) une suite de fermés deux-à-deux disjoints de V dont la réunion est égale à V. Montrer que si $v_0 \in H_0$ et $v_1 \notin H_0$, les ensembles

$$F_n = \{t \in [0,1] : v_0 + t(v_1 - v_0) \in H_n\}$$

sont des fermés de $[0,1]$ deux-à-deux disjoints de réunion égale à $[0,1]$.

En déduire que l'un des H_n est égal à V et que les autres sont vides.

III

Soient E un espace de Hilbert réel, dans lequel le produit scalaire des vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$, et A une partie convexe fermée non vide de E. On note q la fonction réelle définie sur E par

$$q(x) = \frac{1}{2} d(x, A)^2 := \frac{1}{2} \inf_{y \in A} \|x - y\|^2$$

On rappelle que pour tout x de E il existe un unique point y de A, qu'on notera $\pi(x)$ tel que $q(x) = \frac{1}{2} \|x - \pi(x)\|^2$ et que, pour tout z de A, on a $\langle x - \pi(x), z - \pi(x) \rangle \leq 0$. On se propose de démontrer que la fonction q est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E.

Soient b et x des points de E, et $a = \pi(b)$.

1) Montrer que

$$\|\pi(x) - a\|^2 = \langle \pi(x) - a, \pi(x) - x\rangle + \langle \pi(x) - a, x - b\rangle + \langle \pi(x) - a, b - a\rangle \leq \langle \pi(x) - a, x - b\rangle$$

et en déduire que

$$\|\pi(x) - a\|^2 \leq \|\pi(x) - a\| \, \|x - b\|$$

puis que $\|\pi(x) - \pi(b)\| \leq \|x - b\|$.

2) Montrer que

$$\|x - \pi(x)\|^2 \leq \|x - a\|^2 = \|x - b\|^2 + \|b - a\|^2 + 2\langle x - b, b - a\rangle$$

et en déduire que

$$q(x) \leq q(b) + \langle x - b, b - a\rangle + \frac{1}{2}\|x - b\|^2$$

3) Montrer que

$$\begin{aligned}\|x - \pi(x)\|^2 &= \|x - b\|^2 + \|b - \pi(x)\|^2 + 2\langle x - b, b - a\rangle + 2\langle x - b, a - \pi(x)\rangle \\ &\geq \|x - b\|^2 + \|b - a\|^2 + 2\langle x - b, b - a\rangle - 2\|x - b\| \, \|a - \pi(x)\| \\ &\geq \|b - a\|^2 + 2\langle x - b, b - a\rangle - \|x - b\|^2\end{aligned}$$

et en déduire que

$$q(x) \geq q(b) + \langle x - b, b - a\rangle - \frac{1}{2}\|x - b\|^2$$

4) Déduire de ce qui précède que

$$q(x) - q(b) - \langle x - b, b - a\rangle = o(x - b)$$

En déduire que q est différentiable en b et que sa différentielle y est la forme linéaire : $h \mapsto \langle h, b - \pi(b)\rangle$.

5) Montrer que la fonction g de E dans E définie par $g(x) = x - \pi(x)$ est continue. En déduire que q est de classe $\mathscr{C}^1$.