

**SUR LES FONCTIONS  
MUNIES DE DÉRIVÉES PARTIELLES**

PAR

JEAN SAINT RAYMOND (\*)

[Univ. P.-et-M.-Curie]

---

**RÉSUMÉ.** — Le but de cette note est de prouver le résultat suivant : « Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$ , et possédant en chaque point des dérivées partielles du premier ordre par rapport à chaque variable; alors l'ensemble des points de différentiabilité de  $f$  est un résiduel de mesure non nulle ». Remarquons que la fonction  $f$  est donc continue en tout point d'un ouvert dense dans  $U$ , mais elle peut avoir un ensemble non négligeable de points de discontinuité.

**ABSTRACT.** — Functions with partial derivatives.

In this paper, we prove the following result: "Let  $f$  be a function defined on an open subset  $U$  of  $\mathbf{R}^n$ , and having at each point partial derivatives with respect to each variable; then the set of points of differentiability of  $f$  is comeager and has positive measure". Remark that  $f$  is thus continuous at each point of a dense open subset of  $U$ , but not necessarily almost everywhere.

**LEMME 1.** — *Si  $f$  possède en chaque point des dérivées partielles du premier ordre, il existe un ouvert dense au voisinage de chaque point duquel  $f$  est lipschitzienne.*

*Démonstration.* — D'après un théorème de R. Baire (cf. [1], p. 338), la fonction  $f$ , qui est séparément continue (et même dérivable), a un ensemble de points de discontinuité  $D$  dont les projections parallèlement aux axes de coordonnées sont maigres.

---

(\*) Texte présenté par G. CHOQUET, reçu le 18 novembre 1978.

Jean SAINT RAYMOND, Mathématiques, Équipe d'Analyse, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Il existe donc des résiduels  $A_1, \dots, A_n$  de  $U$  tels que  $f$  est continue en tout point de  $A_i$  et que :

$$(1) \quad ((x_1, \dots, x_n) \in A_i; (y_1, \dots, y_n) \in U; y_j = x_j \text{ pour } j \neq i) \\ \Rightarrow (y_1, \dots, y_n) \in A_i.$$

Pour chaque  $i$ ,  $\partial f / \partial x_i | A_i$  est de première classe de Baire et possède donc un résiduel  $B_i$  de points de continuité relative.

Soit  $x$  un point de  $G = \bigcap_1^n B_i$ . Chacune des  $\partial f / \partial x_i | A_i$  est continue en  $x$ , donc bornée sur l'intersection de  $A_i$  avec un voisinage de  $x$ .

Soient  $m \in \mathbf{R}_+$  et  $P_x$  un cube ouvert centré en  $x$  tels que :

$$\forall i, \quad \forall y \in P_x \cap A_i, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \leq m.$$

Si  $z$  et  $z'$  sont deux points de  $\bigcap_1^n A_i$ , compte tenu de la formule des accroissements finis et de la propriété (1), on a :

$$\begin{aligned} |f(z') - f(z)| &\leq \sum_{i=1}^n |f(z'_1, \dots, z'_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_n) \\ &\quad - f(z'_1, \dots, z'_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n m |z'_i - z_i|. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $f$  est  $m$ -lipschitzienne sur  $P_x \cap \bigcap_1^n A_i$ .

En passant à la limite coordonnée par coordonnée, puisque  $f$  est séparément continue, on trouve que  $f$  est  $m$ -lipschitzienne sur  $P_x$ . Comme  $G$  est un résiduel de  $U$ , il est partout dense et l'ouvert  $O = \bigcup_{x \in G} P_x$  est un ouvert partout dense satisfaisant la condition de l'énoncé.

LEMME 2. — *Soit  $f$  une fonction lipschitzienne définie sur un ouvert et munie de dérivées partielles du premier ordre. L'ensemble des points de non-différentiabilité de  $f$  est maigre et négligeable.*

Les dérivées partielles sont de première classe puisque  $f$  est continue, et l'ensemble de leurs points de continuité communs est un résiduel en chaque point duquel  $f$  est différentiable (et même strictement différentiable). Il est bien connu par ailleurs qu'une fonction lipschitzienne est presque partout différentiable. Il peut néanmoins arriver, même pour  $n = 1$ , qu'il n'existe aucun  $F_\sigma$  maigre et négligeable en dehors duquel  $f$  soit différentiable.

THÉORÈME 3. — *Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  possédant en chaque point des dérivées partielles du premier ordre. Alors l'ensemble des points de différentiabilité de  $f$  est un résiduel de mesure non nulle.*

Ceci s'obtient immédiatement en combinant les lemmes 1 et 2, compte tenu de ce que l'ouvert dense  $O$  a une mesure non nulle.

*Exemple 4.* — Soit  $\theta < 1$ . Il existe sur  $[0, 1]^2$  une fonction continue, de classe  $C^1$  par rapport à chaque variable, dont l'ensemble des points de différentiabilité a pour mesure  $1 - \theta$ .

Soit  $K$  le compact de  $[0, 1]$  obtenu comme l'ensemble de Cantor, mais en enlevant à la  $n$ -ième opération la fraction  $\alpha_n$  de chaque segment, au milieu de ce segment, au lieu du tiers central. La mesure de  $K$  vaut  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n)$  qui peut être rendue égal à  $\theta^{1/2}$ , par exemple en prenant :

$$1 - \alpha_n = e^{\log \theta / 2^{n+1}}.$$

On notera  $(I_n)_{n \geq 1}$  la suite des intervalles contigus à  $K$ , et, pour chaque  $n$ ,  $\rho(n)$  la longueur de  $I_n$ , ainsi que  $\xi_n$  le milieu de  $I_n$ .

Si  $I_n$  est l'intervalle central de l'un des  $2^k$  segments de longueur  $\varepsilon_k = 1/2^k \prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j)$  obtenus à la  $k$ -ième opération, et  $x$  l'un des points de ce segment de longueur  $\varepsilon_k$ , on a :

$$|x - \xi_n| \leq \frac{\varepsilon_k}{2} < \frac{1}{2^{k+1}}$$

et

$$\rho(n) = \alpha_{k+1} \varepsilon_k.$$

On en conclut que :

$$\forall x \in K, \quad \forall k \geq 1, \quad \exists n, \quad |x - \xi_n| \leq \frac{\varepsilon_k}{2} \quad \text{et} \quad \rho(n) = \alpha_{k+1} \varepsilon_k.$$

Nous construisons une fonction  $\varphi$  nulle sur  $K \times [0, 1] \cup [0, 1] \times K$  et dont l'ensemble de non-différentiabilité est  $K \times K$ .

Soit  $g$  la fonction sur  $\mathbf{R}^2$ , nulle hors de  $[-1, 1]^2$  et égale à

$$g(x, y) = (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 \quad \text{sur} \quad [-1, 1]^2.$$

La fonction  $g$  est de classe  $C^1$ , et on a  $g(0, 0) = 1$ .

Pour tout couple  $(m, n)$  tel que  $\rho(m) = \rho(n)$  il existe une homothétie  $h_{m, n}$  transformant le carré  $I_m \times I_n$  en  $[-1, 1]^2$ .

Si l'on pose maintenant :

$$\varphi(x, y) = \sum_{\rho(m) = \rho(n) = \alpha_{k+1} \varepsilon_k} g_0 h_{m, n}(x, y),$$

on a la fonction cherchée.

Comme les carrés  $I_m \times I_n$  sont deux à deux disjoints, la convergence de la série est uniforme, et  $\varphi$  est continue.

Puisque l'on a  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ , il suffit de prouver que  $\partial f / \partial x$  existe en tout point.

Si  $y \in K, \forall n, y \notin I_n$  et  $\varphi(x, y) = 0$  pour tout  $x$ .

Si  $y \notin K$ , il existe un  $n$  unique tel que  $y \in I_n$  donc un nombre fini de  $m$  tels que  $\rho(m) = \rho(n)$ . La fonction  $\varphi(\cdot, y)$  est donc somme finie de fonctions de classe  $C^1$ , et elle même de classe  $C^1$ .

Puisque, au voisinage de tout point de  $I_m \times [0, 1]$ , la série est localement finie, la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$  en tout point de  $K^c \times [0, 1]$ , et, par symétrie, en tout point de  $[0, 1] \times K^c$ .

Donc  $\varphi$  est de classe  $C^1$  en tout point du complémentaire de  $K \times K$ . Puisque  $\varphi$  est positive sur  $[0, 1]^2$  et nulle sur  $K \times K$ , sa différentielle serait nulle en tout point de  $K \times K$  où elle existerait.

Mais si  $(x, y) \in K$ , il existe pour tout  $k$ , d'après ce qui précède, un  $m$  et un  $n$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x - \xi_m| \leq \frac{\varepsilon_k}{2}, \\ |y - \xi_n| \leq \frac{\varepsilon_k}{2}, \\ \rho(m) = \rho(n) = \alpha_{k+1} \varepsilon_k. \end{array} \right.$$

Donc

$$\varphi(\xi_m, \xi_n) = \varepsilon_k,$$

et

$$\left| \varphi(\xi_m, \xi_n) - \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi_m - x) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\xi_n - y) \right| = \varepsilon_k \geq |x - \xi_m| + |y - \xi_n|.$$

ce qui prouve que  $\varphi$  ne peut être différentiable en  $(x, y)$ .

Par conséquent, l'ensemble de non-différentiabilité de  $f$  est  $K \times K$ , dont la mesure est exactement  $\theta^{1/2} \times \theta^{1/2} = \theta$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAHN (H.). — *Reelle Funktionen. 1. Teil.* Chelsea Publishing Company, 1948.